

1. Skalární součin, norma

Standardní a nestandardní skalární součin

Cv. 1.1 Při použití standardního skalárního součinu v \mathbb{R}^4 spočítejte pro vektory $x = (1, 1, 1, 1)^T$ a $y = (1, 2, 4, 2)^T$:

- (a) skalární součin $\langle x, y \rangle$,
- (b) normy $\|x\|$, $\|y\|$,
- (c) vzdálenost x od y .

Řešení:

- (a) Podle definice standardního skalárního součinu je

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle &= x^T y = \sum_{i=1}^4 x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 = \\ &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 = 9.\end{aligned}$$

- (b) Podle definice eukleidovské normy

$$\begin{aligned}\|x\| &= \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x^T x} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = 2, \\ \|y\| &= \sqrt{\langle y, y \rangle} = \sqrt{y^T y} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2 + 2^2} = 5.\end{aligned}$$

- (c) Vzdálenost mezi vektory (body) x, y je definovaná jako norma jejich rozdílu, tedy

$$\|x - y\| = \|(0, -1, -3, -1)^T\| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + (-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}.$$

Cv. 1.2 Při použití standardního skalárního součinu v \mathbb{C}^3 spočítejte pro vektory $x = (1, 3i, 1 + 5i)^T$ a $y = (1 - i, 1, 1)^T$:

- (a) skalární součin $\langle x, y \rangle$,
- (b) normy $\|x\|$, $\|y\|$,
- (c) vzdálenost x od y .

Řešení:

- (a) Podle definice standardního skalárního součinu je

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle &= x^T \bar{y} = \sum_{i=1}^3 x_i \bar{y}_i = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + x_3 \bar{y}_3 = \\ &= 1 \cdot (1 + i) + 3i \cdot 1 + (1 + 5i) \cdot 1 = 2 + 9i.\end{aligned}$$

- (b) Podle definice eukleidovské normy

$$\begin{aligned}\|x\| &= \sqrt{\langle x, \bar{x} \rangle} = \sqrt{x^T \bar{x}} = \sqrt{1 + 3i(-3i) + (1 + 5i)(1 - 5i)} = 6, \\ \|y\| &= \sqrt{\langle y, \bar{y} \rangle} = \sqrt{y^T \bar{y}} = \sqrt{(1 - i)(1 + i) + 1 + 1} = 2.\end{aligned}$$

- (c) Vzdálenost mezi vektory (body) x, y je definovaná jako norma jejich rozdílu, tedy

$$\|x - y\| = \|(i, -1 + 3i, 5i)^T\| = 6.$$

- Cv. 1.3** Jak vypadá množina všech vektorů, které jsou kolmé na vektor $y = (1, 5, 2)^T$? Dokážete závěr zobecnit?

Řešení:

Vektor $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ je kolmý na vektor y , pokud $0 = \langle x, y \rangle = x_1 + 5x_2 + 2x_3$. Množina hledaných vektorů je tedy popsána rovnicí $x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0$ a geometricky tvoří rovinu v prostoru \mathbb{R}^3 . Báze je tvořena například vektory $(5, -1, 0)^T, (2, 0, -1)^T$.

Pokud úvahu zobecníme, tak množina vektorů kolmých na daný vektor $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{o\}$ je charakterizována jednou rovnicí. Geometricky tato množina představuje nadrovinu v prostoru \mathbb{R}^n , tedy je podprostor dimenze $n - 1$.

- Cv. 1.4** Rozhodněte, zda následující zobrazení představují skalární součin na prostoru \mathbb{R}^2 :

- (a) $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$,
 (b) $\langle x, y \rangle = -x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$,
 (c) $\langle x, y \rangle = x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$,
 (d) $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2$.

Řešení:

- (a) Ne, protože není splněna symetrie. Například pro $x = (1, 0)^T, y = (0, 1)^T$ je

$$\langle x, y \rangle = 2 \neq -2 = \langle y, x \rangle,$$

- (b) Ne, protože není splněna první vlastnost z definice skalárního součinu. Například pro $x = (1, 0)^T$ je $\langle x, x \rangle = -1$, což není kladná hodnota.
 (c) Ne, protože není splněna první vlastnost z definice skalárního součinu. Například pro $x = (1, 0)^T$ je $\langle x, x \rangle = 0$ což není kladná hodnota.
 (d) Ano. Musíme ověřit vlastnosti skalárního součinu:

- První vlastnost z definice. Upravme

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle &= x_1x_1 + 2x_1x_2 + 2x_2x_1 + 5x_2x_2 \\ &= x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 = (x_1 + 2x_2)^2 + x_2^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Hodnota je nulová pouze tehdy, když jsou oba sčítance nulové, tedy když

$$x_1 + 2x_2 = 0 \text{ a zároveň } x_2 = 0.$$

To nastane pouze pro $x = (0, 0)^T$, čímž je první vlastnost dokázána.

- Vlastnost se součtem $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ platí, protože

$$\begin{aligned} \langle x + y, z \rangle &= (x_1 + y_1)z_1 + 2(x_1 + y_1)z_2 + 2(x_2 + y_2)z_1 + 5(x_2 + y_2)z_2, \\ \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle &= (x_1z_1 + 2x_1z_2 + 2x_2z_1 + 5x_2z_2) \\ &\quad + (y_1z_1 + 2y_1z_2 + 2y_2z_1 + 5y_2z_2). \end{aligned}$$

- Vlastnost s násobky $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ platí, protože

$$\begin{aligned}\langle \alpha x, y \rangle &= \alpha x_1 y_1 + 2\alpha x_1 y_2 + 2\alpha x_2 y_1 + 5\alpha x_2 y_2, \\ \alpha \langle x, y \rangle &= \alpha(x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + 5x_2 y_2).\end{aligned}$$

- Symetrie: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ platí, protože

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle &= x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + 5x_2 y_2, \\ \langle y, x \rangle &= y_1 x_1 + 2y_1 x_2 + 2y_2 x_1 + 5y_2 x_2.\end{aligned}$$

Norma indukovaná skalárním součinem

Cv. 1.5 Pythagorova věta.

- Nad \mathbb{R} dokažte: $x \perp y$ platí právě tehdy, když $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.
- Najděte protipříklad nad \mathbb{C} , kdy předchozí ekvivalence neplatí, tj. x, y nejsou kolmé a přesto $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Řešení:

- Upravíme výraz

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle = \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle.\end{aligned}$$

Tudíž rovnost $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ nastane právě tehdy, když $2\langle x, y \rangle = 0$, neboli když $x \perp y$.

- Protipříklad nad \mathbb{C} : Uvažujme například vektory $x = (1, 0)^T$, $y = (i, 0)^T$. Nejsou na sebe kolmé, ale

$$\|x + y\|^2 = 2 = 1 + 1 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Cv. 1.6 Připomeňme, že stopa matice je definována jako součet prvků na diagonále:

$$\text{trace}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

- Ukažte, že $\langle A, B \rangle = \text{trace}(A^T B)$ definuje skalární součin na prostoru $\mathbb{R}^{m \times n}$.
- Pro tento skalární součin zformulujete Cauchyho–Schwarzovu nerovnost.
- Dokažte $\text{trace}(A)^2 \leq n \cdot \text{trace}(A^T A)$.

Řešení:

- Pišme

$$\text{trace}(A^T B) = \sum_{i=1}^n (A^T B)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (A^T)_{ij} B_{ji} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ji} b_{ji}.$$

Čili výraz $\text{trace}(A^T B)$ představuje standardní skalární součin, pokud matici A asociujeme s dlouhým vektorem, složeným z jejích prvků

$$(a_{11}, \dots, a_{m1}, a_{22}, \dots, a_{m2}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{mn}).$$

(b) Cauchyho–Schwarzova nerovnost $|\langle A, B \rangle| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ dostane podobu

$$\text{trace}(A^T B) \leq \sqrt{\text{trace}(A^T A)} \sqrt{\text{trace}(B^T B)}.$$

Ekvivalentně můžeme též psát

$$\text{trace}(A^T B)^2 \leq \text{trace}(A^T A) \text{trace}(B^T B).$$

(c) Do Cauchyho–Schwarzovy nerovnosti dosadíme $A := I_n$, $B := A$ a tím pádem dostaneme

$$\text{trace}(A)^2 \leq \text{trace}(I_n) \cdot \text{trace}(A^T A) = n \cdot \text{trace}(A^T A).$$

Cv. 1.7 Dokažte, že pro každé $a_1, \dots, a_n > 0$ platí:

$$n^2 \leq (a_1 + \dots + a_n)(a_1^{-1} + \dots + a_n^{-1}).$$

Řešení:

Aplikujeme Cauchyho–Schwarzovu nerovnost. Ta má tvar

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Konkrétně pro prostor \mathbb{R}^n a standardní skalární součin je tvaru

$$|\sum_{i=1}^n x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

Umocněním obou stran nerovnosti dostaneme

$$|\sum_{i=1}^n x_i y_i|^2 \leq (\sum_{i=1}^n x_i^2) \cdot (\sum_{i=1}^n y_i^2).$$

Nyní stačí vhodně dosadit za vektory x, y . Konkrétně zvolíme

$$x = (\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_n})^T, \quad y = (1/\sqrt{a_1}, \dots, 1/\sqrt{a_n})^T.$$

Tím dostane Cauchyho–Schwarzova nerovnost podobu

$$|\sum_{i=1}^n 1|^2 \leq (a_1 + \dots + a_n)(a_1^{-1} + \dots + a_n^{-1}),$$

což po úpravě dá požadovaný tvar.

Norma obecně

Cv. 1.8 Ověřte, že $\|x\| = |x_1 - 2x_2| + |3x_1 - 4x_2| + |5x_1 - 6x_2|$ je normou na prostoru \mathbb{R}^2 .

Řešení:

Musíme ověřit vlastnosti z definice normy:

- Hodnota $\|x\|$ je zřejmě vždy nezáporná. Nulová je pouze, když všechny sčítance jsou nulové, tedy když

$$x_1 - 2x_2 = 0, \quad 3x_1 - 4x_2 = 0, \quad 5x_1 - 6x_2 = 0.$$

Tato soustava má jediné řešení, a to $x_1 = x_2 = 0$. Proto $\|x\| = 0$ nastane jen tehdy, když $x = (0, 0)^T$.

- Vlastnost $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ platí pro všechna $x \in \mathbb{R}^2$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, neboť

$$\begin{aligned}\|\alpha x\| &= |\alpha x_1 - 2\alpha x_2| + |3\alpha x_1 - 4\alpha x_2| + |5\alpha x_1 - 6\alpha x_2| \\ &= |\alpha| \cdot |x_1 - 2x_2| + |\alpha| \cdot |3x_1 - 4x_2| + |\alpha| \cdot |5x_1 - 6x_2| \\ &= |\alpha| \cdot \|x\|.\end{aligned}$$

- Trojúhelníková nerovnost:

$$\begin{aligned}\|x + y\| &= |x_1 + y_1 - 2(x_2 + y_2)| + |3(x_1 + y_1) - 4(x_2 + y_2)| + \\ &\quad + |5(x_1 + y_1) - 6(x_2 + y_2)| \\ &\leq |x_1 - 2x_2| + |y_1 - 2y_2| + |3x_1 - 4x_2| + \\ &\quad + |3y_1 - 4y_2| + |5x_1 - 6x_2| + |5y_1 - 6y_2| = \|x\| + \|y\|.\end{aligned}$$

Cv. 1.9 Buď $\|\cdot\|$ libovolná reálná norma na prostoru \mathbb{R}^n a buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární matice. Dokažte, že $\|x\|_A := \|Ax\|$ je také norma.

Řešení:

Ověříme vlastnosti z definice normy:

- Hodnota $\|x\|_A$ je zřejmě vždy nezáporná. Nulová je pouze, když $Ax = o$. Díky regularitě matice A to nastane pouze pro $x = o$,
- $\|\alpha x\|_A = \|A\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|Ax\| = |\alpha| \cdot \|x\|_A$,
- Trojúhelníková nerovnost:

$$\|x + y\|_A = \|A(x + y)\| = \|Ax + Ay\| \leq \|Ax\| + \|Ay\| = \|x\|_A + \|y\|_A.$$

Cv. 1.10 Dokažte ekvivalenci norem

$$\begin{aligned}\|x\|_1 &= \sum_{i=1}^n |x_i|, \\ \|x\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \\ \|x\|_\infty &= \max_{i=1, \dots, n} |x_i|\end{aligned}$$

na prostoru \mathbb{R}^n . Konkrétně ukažte, že platí následující vztahy:

$$\begin{aligned}\|x\|_\infty &\leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty, \\ \|x\|_\infty &\leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty, \\ \|x\|_2 &\leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2.\end{aligned}$$

Řešení:

Nerovnost $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1$ plyne díky

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| = \|x\|_1.$$

Nerovnost $\|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$ plyne díky

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j| \leq \sum_{j=1}^n \max_{i=1, \dots, n} \{|x_i|\} = \sum_{j=1}^n \|x\|_\infty = n\|x\|_\infty.$$

Nerovnost $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$ plyne díky

$$\|x\|_\infty^2 = \max_{i=1,\dots,n} x_i^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 = \|x\|_2^2.$$

Nerovnost $\|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$ plyne díky

$$\|x\|_2^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2 \leq \sum_{j=1}^n \max_{i=1,\dots,n} \{x_i^2\} = \sum_{j=1}^n \|x\|_\infty^2 = n\|x\|_\infty^2.$$

Nerovnost $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$ plyne díky

$$\|x\|_2^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2 \leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j| \right)^2 = \|x\|_1^2.$$

Zbývá nerovnost $\|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2$. Cauchyho–Schwarzova nerovnost $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ aplikovaná na vektor x a vektor $y = (1, \dots, 1)^T$ dává

$$\sum_{j=1}^n x_j \leq \sqrt{n}\|x\|_2.$$

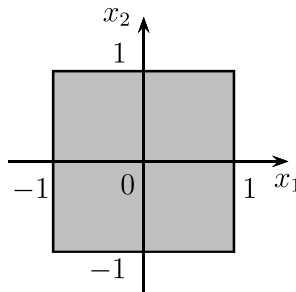
To dokazuje požadovanou nerovnost v nezáporném ortantu. V dalších ortantech dostaneme nerovnost analogicky z Cauchyho–Schwarzovy nerovnosti aplikované na vektor x a příslušný vektor $y \in \{\pm 1\}^n$.

Cv. 1.11 Jednotková koule v prostoru \mathbb{R}^n při dané normě je definovaná jako množina vektorů, jejichž norma je nanejvýš jedna, tedy $\{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq 1\}$. Nakreslete jednotkovou kouli pro následující normy v \mathbb{R}^2 :

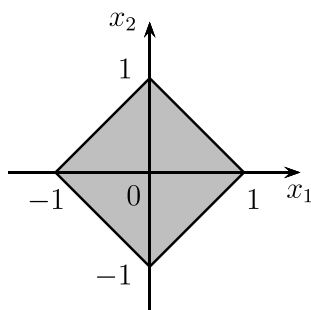
- (a) maximová norma $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$,
- (b) součtová norma $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$,
- (c) norma $\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|, |x_1 - x_2|\}$.

Řešení:

- (a) V maximové normě je jednotková koule popsána nerovnicí $\max\{|x_1|, |x_2|\} \leq 1$, což se dá ekvivalentně vyjádřit $|x_1| \leq 1$ a zároveň $|x_2| \leq 1$. To znamená, že $x_1 \in [-1, 1]$, $x_2 \in [-1, 1]$ a jednotková koule má tvar čtverce:



- (b) V součtové normě je jednotková koule popsána nerovnicí $|x_1| + |x_2| \leq 1$. Nyní budeme postupovat analýzou postupně pro jednotlivé kvadranty. V nezáporném kvadrantu má nerovnice tvar $x_1 + x_2 \leq 1$, čili část jednotkové koule v tomto kvadrantu tvoří trojúhelník s vrcholy $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$. V kvadrantu vpravo dole (nezáporná první složka, nekladná druhá složka) má nerovnice tvar $x_1 - x_2 \leq 1$ a část jednotkové koule v tomto kvadrantu tvoří trojúhelník s vrcholy $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, -1)$. Analogicky postupujeme dále a nakonec dostaneme požadovaný obrázek:



- (c) V této normě je jednotková koule popsána nerovnicí

$$\max\{|x_1|, |x_2|, |x_1 - x_2|\} \leq 1,$$

což se dá ekvivalentně vyjádřit jako tři podmínky, které musí platit zároveň:

$$|x_1| \leq 1, \quad |x_2| \leq 1 \quad \text{a} \quad |x_1 - x_2| \leq 1.$$

Víme již, že první dvě podmínky popisují čtverec. Třetí podmínka z tohoto čtverce kus odřízne. Abychom to nahlédli, vyjádříme podmínku jako $x_1 - x_2 \leq 1$ a zároveň $-(x_1 - x_2) \leq 1$. První nerovnost popisuje polorovinu, která ze čtverce odřízne trojúhelník s vrcholy $(1, 0)$, $(1, -1)$, $(0, -1)$ a druhá nerovnost popisuje polorovinu, která ze čtverce odřízne trojúhelník s vrcholy $(-1, 0)$, $(-1, 1)$, $(0, 1)$. Dohromady tak dostaneme jednotkovou kouli ve tvaru:

