1. Skalární součin, norma

Standardní a nestandardní skalární součin

Cv. 1.1 Při použití standardního skalárního součinu v $\mathbb{R}^4$ spočítejte pro vektory $x = (1,1,1,1)^T$ a $y = (1,2,4,2)^T$:

(a) skalární součin $\langle x, y\rangle$,

(b) normy $\|x\|$, $\|y\|$,

(c) vzdálenost x od y.

Cv. 1.2 Při použití standardního skalárního součinu v $\mathbb{C}^3$ spočítejte pro vektory $x = (1, 3i, 1+5i)^T$ a $y = (1-i, 1, 1)^T$:

(a) skalární součin $\langle x, y\rangle$,

(b) normy $\|x\|$, $\|y\|$,

(c) vzdálenost x od y.

Cv. 1.3 Jak vypadá množina všech vektorů, které jsou kolmé na vektor $y = (1,5,2)^T$? Dokážete závěr zobecnit?

Cv. 1.4 Rozhodněte, zda následující zobrazení představují skalární součin na prostoru $\mathbb{R}^2$:

(a) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$,

(b) $\langle x, y\rangle = -x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$,

(c) $\langle x, y\rangle = x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$,

(d) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2$.

Norma indukovaná skalárním součinem

Cv. 1.5 Pythagorova věta.

(a) Nad $\mathbb{R}$ dokažte: $x \perp y$ platí právě tehdy, když $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

(b) Najděte protipříklad nad $\mathbb{C}$, kdy předchozí ekvivalence neplatí, tj. x, y nejsou kolmé a přesto $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Cv. 1.6 Připomeňme, že stopa matice je definována jako součet prvků na diagonále:

$$\operatorname{trace}(A) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

(a) Ukažte, že $\langle A, B\rangle = \operatorname{trace}(A^TB)$ definuje skalární součin na prostoru $\mathbb{R}^{m\times n}$.

(b) Pro tento skalární součin zformulujete Cauchyho–Schwarzovu nerovnost.

(c) Dokažte $\operatorname{trace}(A)^2 \le n \cdot \operatorname{trace}(A^TA)$.

Cv. 1.7 Dokažte, že pro každé $a_1, \ldots, a_n > 0$ platí:

$$n^2 \le (a_1 + \ldots + a_n)(a_1^{-1} + \ldots + a_n^{-1}).$$

Norma obecně

Cv. 1.8 Ověřte, že $\|x\| = |x_1 - 2x_2| + |3x_1 - 4x_2| + |5x_1 - 6x_2|$ je normou na prostoru $\mathbb{R}^2$.

Cv. 1.9 Buď $\|\cdot\|$ libovolná reálná norma na prostoru $\mathbb{R}^n$ a buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární matice. Dokažte, že $\|x\|_A \coloneqq \|Ax\|$ je také norma.

Cv. 1.10 Dokažte ekvivalenci norem

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \textstyle\sum_{i=1}^n |x_i|, \\ \|x\|_2 &= \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^n x_i^2}, \\ \|x\|_\infty &= \max_{i=1,\dots,n} |x_i| \end{aligned}$$

na prostoru $\mathbb{R}^n$. Konkrétně ukažte, že platí následující vztahy:

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty \le \|x\|_1 &\le n\|x\|_\infty, \\ \|x\|_\infty \le \|x\|_2 &\le \sqrt{n}\|x\|_\infty, \\ \|x\|_2 \le \|x\|_1 &\le \sqrt{n}\|x\|_2. \end{aligned}$$

Cv. 1.11 Jednotková koule v prostoru $\mathbb{R}^n$ při dané normě je definovaná jako množina vektorů, jejichž norma je nanejvýš jedna, tedy $\{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| \le 1\}$. Nakreslete jednotkovou kouli pro následující normy v $\mathbb{R}^2$:

(a) maximová norma $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$,

(b) součtová norma $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$,

(c) norma $\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|, |x_1 - x_2|\}$.