2. Ortonormální systém a Gramova–Schmidtova ortogonalizace

Cv. 2.1 Určete koeficienty lineární kombinace vektoru $(3,2,1)^T$ vůči ortonormální bázi $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^T$, $(0,0,1)^T$.

Řešení:

Standardní způsob výpočtu koeficientů lineární kombinace (tedy souřadnic) vede na řešení soustavy lineárních rovnic

$$\alpha_1\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T+\alpha_2\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^T+\alpha_3(0,0,1)^T=(3,2,1)^T,$$

čili na

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 3 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Protože se jedná o ortonormální bázi, můžeme využít toho, že lze koeficienty vyjádřit snadněji pomocí tzv. *Fourierových* koeficientů jako $x=\sum_{i=1}^n\langle x,u_i\rangle u_i$, kde $u_1,\dots,u_n$ je ortonormální báze.

Aplikací vzorce dostáváme

- $\alpha_1=\langle(3,2,1)^T,\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T\rangle=\frac{5}{\sqrt{2}}$,
- $\alpha_2=\langle(3,2,1)^T,\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^T\rangle=-\frac{1}{\sqrt{2}}$,
- $\alpha_3=\langle(3,2,1)^T,(0,0,1)^T\rangle=1$.

Cv. 2.2 V prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem nalezněte pomocí Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace ortonormální bázi $B=\{z_1,\dots,z_r\}$ řádkového prostoru matice

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\4&1&4&1\\1&2&3&4\end{pmatrix}.$$

Řešení:

Aplikujeme Gramovu–Schmidtovu ortogonalizaci na řádky matice A, tedy na vektory $x_1=(1,1,1,1)^T$, $x_2=(4,1,4,1)^T$, $x_3=(1,2,3,4)^T$.

Algoritmus Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace pracuje iterativně, kdy v každé iteraci nakolmí vektor na množinu již zortonormalizovaných vektorů. Konkrétně, v i-té iteraci nejprve odečte od vektoru x_i jeho kolmou projekci do prostoru $\operatorname{span}\{z_1,\dots,z_{i-1}\}$ již dříve ortonormalizovaných vektorů a dostaneme vektor $y_i=x_i-\sum_{j=1}^{i-1}\langle x_i,z_j\rangle z_j$. Následně tento vektor normalizuje: $z_i=\frac{y_i}{\|y_i\|}$.

Jednotlivé kroky Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace jsou:

- normalizujeme $y_1=x_1$: $\|y_1\|=\sqrt{4}=2$ a odtud $z_1=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})^T$.
- $\langle x_2,z_1\rangle=5$ a proto $y_2=(4,1,4,1)^T-5(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})^T=(\frac{3}{2},-\frac{3}{2},\frac{3}{2},-\frac{3}{2})^T$.

- normalizujeme y_2: $\|y_2\| = 3$ a dostaneme $z_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T$.
- $\langle x_3, z_1 \rangle = 5$, $\langle x_3, z_2 \rangle = -1$ a tedy

$$y_3 = (1,2,3,4)^T - 5(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})^T + 1(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})^T = (-1,-1,1,1)^T.$$

- normalizujeme y_3: $\|y_3\| = 2$ a máme $z_3 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$.

Řešením je ortonormální báze $B = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T, (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T, (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T\}$.

Poznámka. Čtenář může dále ověřit, že vektory z_1, z_2, z_3 jsou skutečně na sebe navzájem kolmé a mají jednotkovou velikost. To poslouží i jako dílčí (a obvykle postačující) zkouška správnosti výsledku. Kdybychom chtěli mít skutečnou jistotu, že výsledek je správně, museli bychom ještě ukázat, že vektory z_1, z_2, z_3 generují prostor $\mathcal{R}(A)$. To lze prokázat například ověřením rovnosti z věty o Fourierových koeficientech, tedy rovnosti $x_k = \sum_{i=1}^{3} \langle x_k, z_i \rangle z_3$ pro $k = 1, 2, 3$.

Cv. 2.3 Rozšiřte ortonormální bázi z předchozího příkladu na ortonormální bázi $\mathbb{R}^4$.

Řešení:
Abychom rozšířili bázi řádkového prostoru matice A na bázi celého prostoru $\mathbb{R}^4$, můžeme například matici nejprve převést do odstupňovaného tvaru. Tím se dozvíme pozice nebázických sloupců, pro které přidáme odpovídající kanonické vektory. Odstupňovaný tvar matice A je

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nebázický je pouze poslední sloupec, proto stačí přidat $x_4 = (0,0,0,1)^T$, čímž získáme rozšíření na bázi $\mathbb{R}^4$. Pokud aplikujeme Gramovu-Schmidtovu ortogonalizaci na původní řádky matice a vektor e_4 přidáme na konec, bude ortogonalizace pro první tři vektory probíhat stejně. Můžeme proto aplikovat Gramovu-Schmidtovu ortogonalizaci rovnou na vektory z_1, z_2, z_3, x_4, čímž získáme hledané rozšíření na ortonormální bázi.

Konkrétně stačí dopočítat pouze nakolmení a normování x_4:

- $\langle x_4, z_1 \rangle = \frac{1}{2}$, $\langle x_4, z_2 \rangle = -\frac{1}{2}$, $\langle x_4, z_3 \rangle = \frac{1}{2}$, a tudíž

$$\begin{aligned} y_4 &= (0,0,0,1)^T - \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})^T + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})^T - \tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})^T \\ &= (\tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4})^T. \end{aligned}$$

- normalizujeme y_4: $\|y_4\| = \frac{1}{2}$ a získáme $z_4 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$.

Cv. 2.4 Buď $x_1 = (1,1,0)^T$, $x_2 = (1,1,1)^T$:

(a) ortogonalizujte vektory v pořadí x_1, x_2,

(b) ortogonalizujte vektory v pořadí x_2, x_1.

Řešení:

Cílem úlohy je uvědomit si, že u Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace záleží na tom, v jakém pořadí vektory ortogonalizujeme. V obou případech dostaneme správnou ortonormální bázi prostoru span$\{x_1, x_2\}$, ale pokaždé se ta báze bude skládat z různých vektorů.

(a) Ortogonalizace v pořadí x_1, x_2 vede k dvojici vektorů

$$\tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T, \quad (0,0,1)^T,$$

(b) Ortogonalizace v pořadí x_2, x_1 vede na dvojici vektorů

$$\tfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T, \quad \tfrac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)^T.$$

Cv. 2.5 Co se stane, když Gramova–Schmidtova ortogonalizace

(a) dostane na vstup lineárně závislé vektory?

(b) dostane na vstup ortogonální vektory?

(c) dostane na vstup ortonormální vektory?

(d) dostane na vstup $-x_i$ namísto x_i? Jak se změní výstup?

Řešení:

(a) Mějme na vstupu $x_1, \dots, x_n$ a mějme j nejmenší takové, že $x_j = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i x_i$ je vektor lineárně závislý na $x_1, \dots, x_{j-1}$. Jeho projekce do podprostoru span$\{x_1, \dots, x_{j-1}\}$ je tedy vektor x_j sám. Gramova–Schmidtova ortogonalizace bude probíhat normálně až do okamžiku, kdy dojde k odečtení kolmé projekce vektoru x_j do podprostoru span$\{x_1, \dots, x_{j-1}\}$. V tu chvíli se vektor vynuluje. Při jeho následném normování se program zastaví, protože budeme chtít dělit 0.

(b) Při odčítání kolmé projekce na již zortonormalizované vektory se vektor nemění, neboť všechny projekce budou nulové vektory. Jediné, k čemu dojde, bude normalizace vektorů, které jsme dostali na vstupu.

(c) V tomto případě ani odčítání projekcí (nulových vektorů), ani normování (dělení 1) nemění vstupní vektory. Proto na výstupu dostaneme stejné vektory jako na vstupu.

(d) Ortogonalizace poběží pro vstup $x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n$ stejně jako pro $x_1, \dots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \dots, x_n$ až do okamžiku, kdy přejdeme k ortogonalizaci i-tého vektoru. Označme jako p kolmou projekci i-tého vektoru do podprostoru span$\{x_1, \dots, x_{i-1}\}$. Vektor p bude mít pro x_i a $-x_i$ opačné znaménko, tedy i po odečtení projekce dostáváme vektory $x_i - p$ a $-x_i - (-p) = -x_i + p = -(x_i - p)$ s opačnými znaménky. Normování nám tento vztah zachová.

Pro ostatní vektory už k žádné změně nedojde. Odčítáme totiž kolmou projekci do podprostoru, která nezávisí na zvolené bázi tohoto podprostoru.

Výstupy obou ortogonalizací budou stejné až na znaménko i-tého vektoru.

Cv. 2.6 V prostoru $\mathbb{C}^3$ ortogonalizujte $x_1 = (i,i,i)^T$, $x_2 = (0,i,i)^T$, $x_3 = (0,0,i)^T$.

Řešení:
Pokud bychom nebyli omezeni na provedení Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace, mohli bychom odečíst druhý vektor od prvního a třetí vektor od druhého. Dostali bychom vektory $(i,0,0)^T$, $(0,i,0)^T$, $(0,0,i)^T$. Ty zřejmě generují stejný prostor jako původní vektory a zároveň mají všechny normu rovnu 1.

Postupujme nyní pomocí Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace. Nejprve znormujme vektor $x_1 = (i,i,i)^T$. Norma vektoru je

$$\|x_1\| = \sqrt{\langle x_1, x_1\rangle} = \sqrt{x_1^T \overline{x_1}} = \sqrt{3(i\cdot(-i))} = \sqrt{-3i^2} = \sqrt{3}.$$

Proto $z_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(i,i,i)^T$. Dále

$$\begin{aligned} y_2 &= (0,i,i)^T - \langle x_2, z_1\rangle \tfrac{1}{\sqrt{3}}(i,i,i)^T = (0,i,i)^T - \tfrac{-2i^2}{\sqrt{3}}\tfrac{1}{\sqrt{3}}(0,i,i)^T \\ &= (0,i,i)^T - \tfrac{2}{3}(i,i,i)^T = \tfrac{1}{3}(-2i,i,i)^T. \end{aligned}$$

Normováním dostáváme

$$z_2 = \tfrac{1}{\|y_2\|}\tfrac{1}{3}(-2i,i,i)^T = \tfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\tfrac{1}{3}(-2i,i,i)^T = \tfrac{1}{\sqrt{6}}(-2i,i,i)^T.$$

Nakonec

$$y_3 = (0,0,i)^T - \tfrac{1}{3}(i,i,i)^T - \tfrac{1}{6}(-2i,i,i)^T = \tfrac{1}{2}(0,-i,i)^T,$$

a tedy $z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-i,i)^T$.

Cv. 2.7 Najděte ortonormální bázi podprostoru $\mathbb{R}^3$ popsaného rovnicí $x - y + z = 0$.

Řešení:
Množina řešení soustavy má tvar $\{(a-b,a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$. Jedna z možných bází je proto $(0,1,1)^T, (1,1,0)^T$. Po znormalizování prvního vektoru dostaneme

$$z_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^T.$$

Po odečtení projekce od vektoru $(1,1,0)^T$ dostáváme

$$\begin{aligned} y_2 &= (1,1,0)^T - \left\langle (1,1,0)^T, \tfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^T \right\rangle \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot (0,1,1)^T \\ &= (1,1,0)^T - \tfrac{1}{2}(0,1,1)^T = (1,\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2})^T. \end{aligned}$$

Nyní stačí normalizovat vektor $y_2 = \left(1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)^T$. Ten má normu $\sqrt{3/2}$. Tedy druhý vektor ortonormální báze je

$$z_2 = \sqrt{\tfrac{2}{3}} \cdot \left(1,\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right)^T = \tfrac{1}{\sqrt{6}}(2,1,-1)^T.$$

Poznamenejme, že řešení úlohy se může lišit v závislosti na volbě báze.

Cv. 2.8 Pro skalární součin $\langle x, y\rangle := 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$ zortogonalizujte vektory $x_1 = (1,0)^T$, $x_2 = (1,1)^T$.

Řešení:

Důležité je uvědomit si, že postup Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace se nijak nemění. Lišit se budu pouze výpočet skalárního součinu $\langle x, y\rangle$ a normy $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

V prvním kroku normalizujeme vektor $(1,0)^T$. Platí, že

$$\|(1,0)^T\| = \sqrt{2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2} = \sqrt{2\cdot 1^2 + 2\cdot 1\cdot 0 + 1\cdot 0^2} = \sqrt{2},$$

proto $z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0)^T$. Dále

$$\langle x_2, z_1\rangle = 2\cdot 1\cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}} + 1\cdot 1\cdot 0 + 1\cdot 1\cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}} + 1\cdot 1\cdot 0 = \tfrac{3}{\sqrt{2}},$$

z čehož

$$y_2 = (1,1)^T - \tfrac{3}{\sqrt{2}}\tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0)^T = (-\tfrac{1}{2}, 1)^T.$$

Protože

$$\|(-\tfrac{1}{2}, 1)^T\| = \sqrt{2\cdot(\tfrac{1}{2})^2 + 2\cdot(-\tfrac{1}{2})\cdot 1 + 1\cdot 1^2} = \tfrac{1}{\sqrt{2}},$$

má druhý vektor ortonormální báze hodnotu $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{1}(-\frac{1}{2}, 1)^T = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,2)^T$.

Můžeme opět provést (dílčí) zkoušku a ověřit, že výsledné vektory z_1, z_2 jsou na sebe kolmé v příslušném skalárním součinu, tedy $\langle z_1, z_2\rangle = 0$.