

## 2. Ortonormální systém a Gramova–Schmidtova ortogonalizace

**Cv. 2.1** Určete koeficienty lineární kombinace vektoru  $(3, 2, 1)^T$  vůči ortonormální bázi  $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T, \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)^T, (0, 0, 1)^T$ .

**Cv. 2.2** V prostoru  $\mathbb{R}^4$  se standardním skalárním součinem nalezněte pomocí Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace ortonormální bázi  $B = \{z_1, \dots, z_r\}$  řádkového prostoru matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Cv. 2.3** Rozšiřte ortonormální bázi z předchozího příkladu na ortonormální bázi  $\mathbb{R}^4$ .

**Cv. 2.4** Buď  $x_1 = (1, 1, 0)^T, x_2 = (1, 1, 1)^T$ :

- (a) ortogonalizujte vektory v pořadí  $x_1, x_2$ ,
- (b) ortogonalizujte vektory v pořadí  $x_2, x_1$ .

**Cv. 2.5** Co se stane, když Gramova–Schmidtova ortogonalizace

- (a) dostane na vstup lineárně závislé vektory?
- (b) dostane na vstup ortogonální vektory?
- (c) dostane na vstup ortonormální vektory?
- (d) dostane na vstup  $-x_i$  namísto  $x_i$ ? Jak se změní výstup?

**Cv. 2.6** V prostoru  $\mathbb{C}^3$  ortogonalizujte  $x_1 = (i, i, i)^T, x_2 = (0, i, i)^T, x_3 = (0, 0, i)^T$ .

**Cv. 2.7** Najděte ortonormální bázi podprostoru  $\mathbb{R}^3$  popsaného rovnicí  $x - y + z = 0$ .

**Cv. 2.8** Pro skalární součin  $\langle x, y \rangle := 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$  zortogonalizujte vektory  $x_1 = (1, 0)^T, x_2 = (1, 1)^T$ .