3. Ortogonální doplněk a projekce

Ortogonální doplněk

Cv. 3.1 Pro vektorový prostor V určete $V^\perp$, $\{0\}^\perp$, $\{\}^\perp$.

Cv. 3.2 Buď $M, N \subseteq V$. Ukažte

(a) $M \subseteq N \;\Rightarrow\; N^\perp \subseteq M^\perp$, ale ne naopak,

(b) $(M \cup N)^\perp = M^\perp \cap N^\perp$.

Cv. 3.3 Najděte podprostor $U \Subset \mathbb{R}^5$ takový, že $\dim U = \dim U^\perp$.

Cv. 3.4 Spočítejte ortogonální doplněk vektoru $u = (1, 0, 0, -2)^T$ do podprostoru $V = \operatorname{span}\{v, w\} = \operatorname{span}\{(1, 2, 4, 0)^T, (0, 1, 2, 1)^T\}$.

Cv. 3.5 Buď

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Najděte $\mathcal{R}(A)$, $\operatorname{Ker}(A)$ a nakreslete je do obrázku.

Cv. 3.6 Najděte bázi ortogonálního doplňku k prostoru

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\}.$$

Ortogonální projekce

Cv. 3.7 Uvažujme standardní skalární součin v $\mathbb{R}^n$ a přímku $p = \operatorname{span}\{y\}$.

(a) Najděte bod x' na přímce p, který je nejbližší bodu $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) Porovnejte velikost projekce x' a vektoru x.

(c) Sestavte matici kolmé projekce na přímku p.

(d) Najděte projekci vektoru $x = (3, -2, 5)^T$ na přímku se směrnicí $y = (2, 1, 1)^T$.

Cv. 3.8 Určete ortogonální projekci p vektoru $a = (2, 2, 1, 5)^T$ do podprostoru generovaného ortonormálními vektory

$$B = \left\{ (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})^T,\ (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})^T,\ (-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})^T \right\}.$$

Dále určete souřadnice této projekce $[p]_B$ vzhledem k bázi B.

Cv. 3.9 Určete vzdálenost bodu $A = [5, 5, 3, 3]$ od roviny ρ procházející počátkem a body $B = [0, 1, -1, 0]$ a $C = [4, -2, 2, -1]$.

Cv. 3.10 Při standardním skalárním součinu určete vzdálenost $c \in \mathbb{R}^n$ od

(a) podprostoru $a^T x = 0$, kde $o \neq a \in \mathbb{R}^n$,

(b) podprostoru $a^T x = b$, kde $o \neq a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$.

Cv. 3.11 Rozložte $u = (3, 2, 6)^T$ na součet $u = v + w$, kde $v \in V = \operatorname{span}\{(1, 0, 0)^T, (0, 1, 1)^T\}$ a $w \in V^\perp$.