(b) Platí

$$\|x'\| = \left\| \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y \right\| = \left| \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} \right| \|y\| = \frac{|\langle x, y\rangle|}{\|y\|^2} \|y\| = \frac{|\langle x, y\rangle|}{\|y\|}.$$

Zároveň můžeme Cauchy-Schwarzovu nerovnost $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ přepsat do tvaru

$$\frac{|\langle x, y\rangle|}{\|y\|} \leq \|x\|,$$

což dohromady dává $\|x'\| \leq \|x\|$. To znamená, že norma kolmé projekce je vždy shora omezena normou původního vektoru.

(c) Kolmá projekce na přímku $p = \operatorname{span}\{y\}$ má předpis $x \mapsto \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} y$. Výraz ekvivalentně přepíšeme

$$\frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y = \frac{x^T y}{y^T y} y = \frac{1}{y^T y}(x^T y)y.$$

Protože $(x^T y)y = y(y^T x) = yy^T x$, můžeme projekci psát ve tvaru

$$\frac{1}{y^T y} yy^T x.$$

Vidíme, že $A = \frac{1}{y^T y} yy^T$ je maticový předpis kolmé projekce na přímku $p = \operatorname{span}\{y\}$.

(d) V zásadě dosadíme do vzorečku pro projekci konkrétní hodnoty. Spočítáme

$$\langle x, y\rangle = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 9, \quad \langle y, y\rangle = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 6.$$

Projekce tedy odpovídá vektoru $\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} y = \frac{3}{2} y = \frac{3}{2}(2, 1, 1)^T$.

Cv. 3.8 Určete ortogonální projekci p vektoru $a = (2, 2, 1, 5)^T$ do podprostoru generovaného ortonormálními vektory

$$B = \left\{ (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})^T,\ (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})^T,\ (-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})^T \right\}.$$

Dále určete souřadnice této projekce $[p]_B$ vzhledem k bázi B.

Řešení:

Protože B je ortonormální bází daného podprostoru, můžeme postupovat přímo podle věty o projekci, která říká, že

$$p = \sum_{i=1}^{3} \langle a, z_i\rangle z_i,$$

kde

$$z_1 = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})^T, \quad z_2 = (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})^T, \quad z_3 = (-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})^T.$$

Spočítáme Fourierovy koeficienty

$$\langle a, z_1\rangle = 5, \quad \langle a, z_2\rangle = -2, \quad \langle a, z_3\rangle = 1.$$

Hledaná projekce p se určí jako

$$p = \sum_{i=1}^{3} \langle a, z_i \rangle z_i = 5z_1 - 2z_2 + 1z_3 = (1, 3, 2, 4)^T.$$

Dále vidíme, že souřadnice vektoru a vzhledem k bázi $B = \{z_1, z_2, z_3\}$ odpovídají Fourierovým koeficientům, a tedy $[p]_B = (5, -2, 1)^T$.

Cv. 3.9 Určete vzdálenost bodu $A = [5, 5, 3, 3]$ od roviny ρ procházející počátkem a body $B = [0, 1, -1, 0]$ a $C = [4, -2, 2, -1]$.

Řešení:

Spočítáme projekci A' bodu A do roviny ρ a hledaná vzdálenost je potom vzdálenost A od A'.

Abychom postupovali podle standardního postupu, označme vektory

$$a = (5, 5, 3, 3)^T, \quad b = (0, 1, -1, 0)^T, \quad c = (4, -2, 2, -1)^T.$$

Pro vyjádření projekce potřebujeme ortonormální bázi roviny $\rho = \operatorname{span}\{b, c\}$. Budeme tedy postupovat Gramovou–Schmidtovou ortogonalizací aplikovanou na vektory b, c:

$$\begin{aligned}
z_1 &:= \tfrac{1}{\|b\|} b = \tfrac{\sqrt{2}}{2}(0, 1, -1, 0)^T, \\
y_2 &:= c - \langle c, z_1 \rangle z_1 = (4, -2, 2, -1)^T - (-2\sqrt{2})\tfrac{\sqrt{2}}{2}(0, 1, -1, 0)^T = (4, 0, 0, -1)^T, \\
z_2 &:= \tfrac{1}{\|y_2\|} y_2 = \tfrac{\sqrt{17}}{17}(4, 0, 0, -1)^T
\end{aligned}$$

a dostaneme ortonormální bázi z_1, z_2. Projekce a' vektoru a do roviny ρ má potom tvar

$$\begin{aligned}
a' &= \langle a, z_1 \rangle z_1 + \langle a, z_1 \rangle z_1 \\
&= \sqrt{2}\tfrac{\sqrt{2}}{2}(0, 1, -1, 0)^T + \sqrt{17}\tfrac{\sqrt{17}}{17}(4, 0, 0, -1)^T \\
&= (4, 1, -1, -1)^T.
\end{aligned}$$

Nakonec spočítáme požadovanou vzdálenost a od a' jako

$$\|a - a'\| = \|(5, 5, 3, 3)^T - (4, 1, -1, -1)^T\| = \|(1, 4, 4, 4)^T\| = 7.$$

Závěr: Vzdálenost bodu A od roviny obsahující o, B a C je 7.

Cv. 3.10 Při standardním skalárním součinu určete vzdálenost $c \in \mathbb{R}^n$ od

(a) podprostoru $a^T x = 0$, kde $o \neq a \in \mathbb{R}^n$,

(b) podprostoru $a^T x = b$, kde $o \neq a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$.

Řešení:

(a) Vzdálenost c od nadroviny $a^T x = 0$ se rovná vzdálenosti c od jeho projekce c_n na tuto nadrovinu, tedy normě vektoru $c - c_n$. Výpočet ale výrazně usnadníme, pokud si uvědomíme, že vektor $c_p = c - c_n$ je vlastně projekce vektoru c na ortogonální doplněk k nadrovině, což je přímka $\operatorname{span}\{a\}$. Projekci na přímku $\operatorname{span}\{a\}$ umíme již vyjádřit jako

$$c_p = \frac{\langle c, a\rangle}{\langle a, a\rangle} a = \frac{c^T a}{\|a\|^2} a.$$

Velikost tohoto vektoru je rovna hledané vzdálenosti

$$\|c_p\| = \left\| \frac{c^T a}{\|a\|^2} a \right\| = \frac{|c^T a|}{\|a\|^2}\|a\| = \frac{|c^T a|}{\|a\|}.$$

(b) Úlohu převedeme na předchozí případ, a to tak, že vektor c a nadrovinu $a^T x = b$ přesuneme o stejný vektor d tak, aby daná nadrovina procházela počátkem.

Jak najít vektor d? Chceme v zásadě rovnici $a^T x = b$ přepsat do tvaru $a^T(x + d) = 0$. Porovnáním obou rovnic dostaneme $a^T d = -b$. Pro vektor d máme nekonečně mnoho možností jak jej zvolit, ale řešení s jednoduchým předpisem je $d = -\frac{b}{a^T a} a$.

Posunutím o vektor d se vzdálenosti mezi objekty nezmění a úlohu tak převedeme na předchozí případ hledání vzdálenosti vektoru $c - \frac{b}{a^T a} a$ od nadroviny $a^T x = 0$. Dosazením do vzorce dostáváme

$$\frac{|(c - \frac{b}{a^T a} a)^T a|}{\|a\|} = \frac{|c^T a - b|}{\|a\|}.$$

Cv. 3.11 Rozložte $u = (3, 2, 6)^T$ na součet $u = v+w$, kde $v \in V = \operatorname{span}\{(1, 0, 0)^T, (0, 1, 1)^T\}$ a $w \in V^\perp$.

Řešení:

Vektor v určíme jako kolmou projekci u do podprostoru V. Poté dopočítáme $w = u - v$. Matice projekce do V má tvar $P = A(A^T A)^{-1} A^T$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dosazením dostáváme

$$v = Pu = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a

$$w = u - v = (3, 2, 6)^T - (3, 4, 4)^T = (0, -2, 2)^T.$$

Alternativně by bylo možné spočítat vektor u pomocí Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace, kde bychom ortogonalizovali vektory $(1, 0, 0)^T$, $(0, 1, 1)^T$, a poté spočítali projekci s využitím ortonormální báze.

Ještě jiný postup je vypočítat nejprve vektor w, a teprve potom vektor v jako $v = u-w$. Výhoda tohoto postupu spočívá v tom, že vektor w je projekcí vektoru u do podprostoru $V^\perp$. Protože $V^\perp = \operatorname{span}\{(0, 1, -1)^T\}$, jedná se o jednoduchou projekci na přímku.

Metoda nejmenších čtverců

Cv. 3.12 Pomocí projekce najděte nejlepší přibližné řešení x' soustavy $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 13 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Všimněte si, že sloupce matice A jsou vzájemně kolmé.

Určete také velikost chyby $\|Ax' - b\|$.

Dostanete stejná řešení jako řešení soustavy $A^T Ax = A^T b$?

Řešení:

Přibližné řešení dané soustavy nalezneme jako souřadnice projekce vektoru b do sloupcového prostoru $\mathcal{S}(A)$ matice A. Protože sloupce a_1, a_2 a a_3 matice A jsou vzájemně kolmé, je projekce vektoru b do sloupcového prostoru A přímo dána předpisem

$$b_{\mathcal{S}(A)} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\langle b, a_i \rangle}{\|a_i\|^2} a_i = 3a_1 - 2a_2 + a_3 = (4, 8, 13, 9)^T.$$

Hledané koeficienty jsou tedy $x' = (3, -2, 1)^T$. Protože sloupce matice A jsou navzájem ortogonální (a tedy lineárně nezávislé), je nalezené x' určené jednoznačně.

Výsledná chyba je

$$\|Ax' - b\| = \|b_{\mathcal{S}(A)} - b\| = \sqrt{45}.$$

Na závěrečnou otázku je odpověď „ano“, což je známo z přednášky. Výsledné řešení je stejné jako řešení soustavy normálních rovnic $A^T Ax = A^T b$. Protože matice A má lineárně nezávislé sloupce, tak matice $A^T A$ je regulární a soustava normálních rovnic má jediné řešení $x' = (3, -2, 1)^T$.

Cv. 3.13 Metodou nejmenších čtverců spočítejte přibližné řešení soustavy $Ax = b$, kde $A = (1, \dots, 1)^T$ se skládá ze sloupce jedniček a $b \in \mathbb{R}^n$.

Řešení:

Vyjádřením soustavy normálních rovnic $A^T Ax = A^T b$ dostáváme

$$n \cdot x = \sum_{i=1}^{n} b_i,$$

tedy přibližným řešením metodou nejmenších čtverců je aritmetický průměr $x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} b_i$ prvků vektoru pravých stran b.

Cv. 3.14 Hookův zákon vyjadřuje lineární úměrnost pružné deformace materiálu na použité síle. Následující tabulka obsahuje hodnoty průtahu pružiny (v palcích) v závislosti na síle/hmotnosti (v librách). Odhadněte koeficient úměrnosti.

síla F	5	7	8	10	12
průtah ℓ	11,1	15,4	17,5	22	26,3

Řešení:

Pro zadané hodnoty síly F a průtahu ℓ hledáme koeficient c, pro který platí $cF = \ell$ (např. pro první sloupec tabulky $c \cdot 5 = 11{,}1$). Chceme tedy řešit soustavu $Ax = b$ tvaru

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix} c = \begin{pmatrix} 11{,}1 \\ 15{,}4 \\ 17{,}5 \\ 22 \\ 26{,}3 \end{pmatrix}.$$

Tato soustava nemá řešení, využijeme proto metodu nejmenších čtverců. Pro tuto soustavu dostáváme normální soustavu rovnic $A^T A x' = A^T b$ s maticí

$$A^T A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 & 10 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix} = 382$$

a vektorem pravých stran

$$A^T b = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 & 10 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11{,}1 \\ 15{,}4 \\ 17{,}5 \\ 22 \\ 26{,}3 \end{pmatrix} = 838{,}9.$$

Přibližné řešení x' dává směrnici přímky (= koeficient úměrnosti)

$$c = (A^T A)^{-1} A^T b \approx 2{,}1961.$$

4. Ortogonální matice

Cv. 4.1 Rozhodněte, zda následující matice jsou ortogonální:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Matice $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je ortogonální právě tehdy, když $Q^TQ = I_n$. Stačí tedy ověřit tuto vlastnost pro zadané matice. Pro první matici spočítáme

$$A^TA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

takže matice není ortogonální. Sloupce matice sice tvoří ortogonální bázi prostoru $\mathbb{R}^2$, ale nikoliv ortonormální bázi. Poznamenejme, že matice $\frac{1}{\sqrt{2}}A$ by již ortogonální byla.

Pro druhou matici spočítáme

$$B^TB = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & 0 \\ 0 & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

kde jsme využili goniometrickou identitu $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Matice B je tudíž ortogonální.

Konečně pro třetí matici máme $C^TC = I_3$, takže je také ortogonální.

Cv. 4.2 Buď $H(u) = I_n - \frac{2}{u^Tu}uu^T$, $u \neq o$, Householderova matice.

(a) Dokažte, že $H(u)$ je symetrická.

(b) Dokažte, že $H(u)$ je ortogonální.

(c) Rozhodněte, zda I_n je Householderovou maticí pro určité $u \neq o$.

Řešení:

(a) Ověříme

$$H(u)^T = \left(I_n - \frac{2}{u^Tu}uu^T\right)^T = I_n^T - \frac{2}{u^Tu}(uu^T)^T = I_n - \frac{2}{u^Tu}uu^T = H(u),$$

tudíž je $H(u)$ symetrická.

(b) Ověříme ortogonalitu Householderovy matice z definice:

$$\begin{aligned} H(u)^TH(u) = H(u)H(u) &= \left(I_n - \frac{2}{u^Tu}uu^T\right)\left(I_n - \frac{2}{u^Tu}uu^T\right) \\ &= I_n - 2\frac{2}{u^Tu}uu^T + \frac{4}{(u^Tu)^2}uu^Tuu^T \\ &= I_n - \frac{4}{u^Tu}uu^T + \frac{4}{(u^Tu)^2}u(u^Tu)u^T \end{aligned}$$

$$= I_n - \frac{4}{u^T u} uu^T + \frac{4(u^T u)}{(u^T u)^2} uu^T$$
$$= I_n - \frac{4}{u^T u} uu^T + \frac{4}{u^T u} uu^T = I_n.$$

V úpravách jsme použili vztah $u(u^T u)u^T = (u^T u)uu^T$, který plyne z toho, že $(u^T u)$ je skalár, a tudíž lze z celého výrazu vytknout na začátek.

(c) Rovnost $H(u) = I_n$ nemůže nikdy nastat, protože by to znamenalo, že $\frac{2}{u^T u} uu^T = 0$. A tato rovnost nenastane (pro $u \neq 0$ rovnost neplatí a pro $u = 0$ bychom ve zlomku dělili nulou).

Cv. 4.3 Nechť $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jsou ortogonální. Je bloková matice

$$A = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

ortogonální?

Řešení:
Ano a lze to nahlédnout několika způsoby.

První způsob je přímo z definice tím, že ověříme rovnost $A^T A = I_{m+n}$:

$$A^T A = \begin{pmatrix} P^T & 0 \\ 0 & Q^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^T P & 0 \\ 0 & Q^T Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = I_{m+n}.$$

Druhý možný způsob využívá charakterizace, že matice A je ortogonální právě tehdy, když její sloupečky tvoří ortonormální systém. To znamená, že sloupce A musí být navzájem kolmé a mít jednotkovou velikost:

- Pokud zvolíme dva sloupce z prvního bloku matice A, tak budou na sebe kolmé, protože matice P je ortogonální. Pokud zvolíme dva sloupce z druhého bloku matice A, tak budou na sebe kolmé, protože matice Q je ortogonální. Zbývá případ, kdy zvolíme jeden sloupec z prvního bloku a druhý z druhého bloku. I pak budou vektory na sebe kolmé díky nulovým složkám pod maticí P a nad maticí Q.
- Konečně sloupce matice A mají jednotkovou velikost, protože ji mají sloupce P i Q a přidáním nulových složech se velikost nezmění.

Cv. 4.4 Najděte všechny

(a) diagonální ortogonální matice řádu n,

(b) diagonální unitární matice řádu n.

Kolik jich je?

Řešení:

(a) Diagonální matice (s libovolnými prvky na diagonále) má vždy ve sloupcích ortogonální systém. Takže aby matice byla ortogonální, musí mít sloupce jednotkovou velikost. Tudíž pro každý prvek na diagonále musí platit $|a_{ii}| = 1$, což znamená, že $a_{ii} = 1$ nebo $a_{ii} = -1$. Matice tedy má tvar

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \pm 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Takovýchto matice je 2^n.

(b) Analogicky jako v předchozím případě pro hledané matice platí $|a_{ii}| = 1$. Jelikož jsou tentokrát prvky matice komplexní čísla, je prvek a_{ii} jakékoli číslo na komplexní jednotkové kružnici, například 1, -1, i, $-i$, nebo $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$. Těchto čísel je nekonečně mnoho, takže i matic daného typu je nekonečně mnoho.

Cv. 4.5 Které z matic elementárních úprav jsou ortogonální?

<u>Řešení:</u>
Jsou to pouze dvě:

1. Matice prohození dvou řádků E_{ij}.

2. Matice $E_i(\pm 1)$ vynásobení řádku i číslem ± 1.

Snadno ověříme, že obě tyto matice jsou ortogonální. A naopak, žádná jiná už ortogonální není.

Cv. 4.6 Buď $p \in S_n$ permutace a $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ permutační matice definovaná tak, že $P_{ij} = 1$ pokud $i = p(j)$ a nula jinak.

(a) Jakou úpravu na matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vykoná operace PA?

(b) Nahlédněte, že P vznikne z jednotkové matice zpermutováním jejích řádků podle p.

(c) Dokažte, že P je ortogonální matice.

(d) Nechť Q je permutační matice odpovídající permutaci q. Jaká matice odpovídá permutaci $p \circ q$?

(e) Jaká permutační matice odpovídá permutaci p^{-1}?

(f) Jakou úpravu na matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vykoná operace AP?

<u>Řešení:</u>

(a) Součin PA zpermutuje řádky matice A podle permutace p.
Důkaz. Řádek $p(i)$ matice PA má tvar

$$(PA)_{p(i),*} = P_{p(i),*}A = e_i^T A = A_{i,*}.$$

Tudíž v řádku $p(i)$ matice PA je i-tý řádek původní matice A.

(b) Z předchozího bodu můžeme na matici $P = PI_n$ pohlížet jako na jednotkovou matici, jejíž řádky zpermutujeme podle p.

(c) P je ortogonální, protože její řádky tvoří ortonormální systém vektorů, jsou to vlastně zpermutované jednotkové vektory.

(d) Permutaci $p \circ q$ odpovídá matice PQ.

Důkaz (z významu). Pišme $PQ = P(QI_n)$, tudíž matice PQ vznikne z jednotkové matice tak, že nejprve zpermutujeme řádky podle permutace q a pak podle permutace p, což je totéž, jako když je zpermutujeme podle $p \circ q$.

Důkaz (z definice). Kdy nastane situace $(PQ)_{ij} = 1$? Protože $(PQ)_{ij} = P_{i,*}Q_{*,j}$, tak situace nastane právě tehdy, když i-tý řádek matice P i j-tý sloupec matice Q jsou stejné jednotkové vektory, např e_k. Protože $P_{i,*} = e_k^T$, je $i = p(k)$. Protože $Q_{*,j} = e_k$, je $k = q(j)$. Tudíž $i = p(k) = p(q(j)) = (p \circ q)(j)$.

(e) Protože $P^T = P^{-1}$, tak máme $P^TP = I_n$. Tudíž permutaci p^{-1} odpovídá permutační matice P^T.

(f) Součin AP zpermutuje sloupce matice A podle permutace p^{-1}.

Důkaz. Tvrzení můžeme snadno nahlédnout z předchozích bodů tak, že vyjádříme $AP = (P^TA^T)^T$, čili matice P^TA^T zpermutuje řádky matice A^T podle permutace p^{-1}.

Cv. 4.7 Rozhodněte o platnosti výroků:

(a) Má-li regulární matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ navzájem kolmé řádky, pak má i navzájem kolmé sloupce.

(b) Má-li matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ navzájem kolmé řádky velikosti 1, pak má i navzájem kolmé sloupce.

Řešení:

(a) Neplatí, uvažujme například matici $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Její řádky jsou na sebe navzájem kolmé, ale sloupce na sebe navzájem kolmé nejsou.

(b) Platí, protože matice je nutně je ortogonální.