3. Ortogonální doplněk a projekce

Ortogonální doplněk

Cv. 3.1 Pro vektorový prostor V určete $V^\perp$, $\{0\}^\perp$, $\{\}^\perp$.

Cv. 3.2 Buď $M, N \subseteq V$. Ukažte

(a) $M \subseteq N \;\Rightarrow\; N^\perp \subseteq M^\perp$, ale ne naopak,

(b) $(M \cup N)^\perp = M^\perp \cap N^\perp$.

Cv. 3.3 Najděte podprostor $U \Subset \mathbb{R}^5$ takový, že $\dim U = \dim U^\perp$.

Cv. 3.4 Spočítejte ortogonální doplněk vektoru $u = (1, 0, 0, -2)^T$ do podprostoru $V = \operatorname{span}\{v, w\} = \operatorname{span}\{(1, 2, 4, 0)^T, (0, 1, 2, 1)^T\}$.

Cv. 3.5 Buď

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Najděte $\mathcal{R}(A)$, $\operatorname{Ker}(A)$ a nakreslete je do obrázku.

Cv. 3.6 Najděte bázi ortogonálního doplňku k prostoru

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\}.$$

Ortogonální projekce

Cv. 3.7 Uvažujme standardní skalární součin v $\mathbb{R}^n$ a přímku $p = \operatorname{span}\{y\}$.

(a) Najděte bod x' na přímce p, který je nejbližší bodu $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) Porovnejte velikost projekce x' a vektoru x.

(c) Sestavte matici kolmé projekce na přímku p.

(d) Najděte projekci vektoru $x = (3, -2, 5)^T$ na přímku se směrnicí $y = (2, 1, 1)^T$.

Cv. 3.8 Určete ortogonální projekci p vektoru $a = (2, 2, 1, 5)^T$ do podprostoru generovaného ortonormálními vektory

$$B = \left\{(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})^T,\ (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})^T,\ (-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})^T\right\}.$$

Dále určete souřadnice této projekce $[p]_B$ vzhledem k bázi B.

Cv. 3.9 Určete vzdálenost bodu $A = [5, 5, 3, 3]$ od roviny ρ procházející počátkem a body $B = [0, 1, -1, 0]$ a $C = [4, -2, 2, -1]$.

Cv. 3.10 Při standardním skalárním součinu určete vzdálenost $c \in \mathbb{R}^n$ od

(a) podprostoru $a^T x = 0$, kde $o \neq a \in \mathbb{R}^n$,

(b) podprostoru $a^T x = b$, kde $o \neq a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$.

Cv. 3.11 Rozložte $u = (3, 2, 6)^T$ na součet $u = v + w$, kde $v \in V = \operatorname{span}\{(1, 0, 0)^T, (0, 1, 1)^T\}$ a $w \in V^\perp$.

Metoda nejmenších čtverců

Cv. 3.12 Pomocí projekce najděte nejlepší přibližné řešení x' soustavy $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 13 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Všimněte si, že sloupce matice A jsou vzájemně kolmé.

Určete také velikost chyby $\|Ax' - b\|$.

Dostanete stejná řešení jako řešení soustavy $A^T Ax = A^T b$?

Cv. 3.13 Metodou nejmenších čtverců spočítejte přibližné řešení soustavy $Ax = b$, kde $A = (1, \dots, 1)^T$ se skládá ze sloupce jedniček a $b \in \mathbb{R}^n$.

Cv. 3.14 Hookův zákon vyjadřuje lineární úměrnost pružné deformace materiálu na použité síle. Následující tabulka obsahuje hodnoty průtahu pružiny (v palcích) v závislosti na síle/hmotnosti (v librách). Odhadněte koeficient úměrnosti.

síla F	5	7	8	10	12
průtah ℓ	11,1	15,4	17,5	22	26,3

4. Ortogonální matice

Cv. 4.1 Rozhodněte, zda následující matice jsou ortogonální:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cv. 4.2 Buď $H(u) = I_n - \frac{2}{u^T u} u u^T$, $u \neq o$, Householderova matice.

(a) Dokažte, že $H(u)$ je symetrická.

(b) Dokažte, že $H(u)$ je ortogonální.

(c) Rozhodněte, zda I_n je Householderovou maticí pro určité $u \neq o$.

Cv. 4.3 Nechť $P \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jsou ortogonální. Je bloková matice

$$A = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

ortogonální?

Cv. 4.4 Najděte všechny

(a) diagonální ortogonální matice řádu n,

(b) diagonální unitární matice řádu n.

Kolik jich je?

Cv. 4.5 Které z matic elementárních úprav jsou ortogonální?

Cv. 4.6 Buď $p \in S_n$ permutace a $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ permutační matice definovaná tak, že $P_{ij} = 1$ pokud $i = p(j)$ a nula jinak.

(a) Jakou úpravu na matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vykoná operace PA?

(b) Nahlédněte, že P vznikne z jednotkové matice zpermutováním jejích řádků podle p.

(c) Dokažte, že P je ortogonální matice.

(d) Nechť Q je permutační matice odpovídající permutaci q. Jaká matice odpovídá permutaci $p \circ q$?

(e) Jaká permutační matice odpovídá permutaci p^{-1}?

(f) Jakou úpravu na matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vykoná operace AP?

Cv. 4.7 Rozhodněte o platnosti výroků:

(a) Má-li regulární matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ navzájem kolmé řádky, pak má i navzájem kolmé sloupce.

(b) Má-li matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ navzájem kolmé řádky velikosti 1, pak má i navzájem kolmé sloupce.