5. Determinanty – výpočet

Cv. 5.1 Spočítejte determinanty následujících reálných matic. Použijte výpočet z definice, pomocí Gaussovy eliminace a pomocí Laplaceova rozvoje podle nějakého řádku.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Cv. 5.2 Spočtěte determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cv. 5.3 Spočtěte determinant následujících matic:

(a) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ -1 & 0 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 & \dots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & 1-n & 0 \end{pmatrix},$$

(b) $$B = \begin{pmatrix} a_1+x & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2+x & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+x & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n+x \end{pmatrix}.$$

Cv. 5.4 Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Rozhodněte, zda následující vztahy pro blokové matice platí či ne:

(a) $\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A)\det(B)$,

(b) $\det\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A)\det(B)$.

Cv. 5.5 Rozhodněte, zda platí $\det(AB) = \det(BA)$.

Cv. 5.6 Zjednodušte výraz $\det(SAS^{-1})$ pro matice $A, S \in \mathbb{T}^{n\times n}$.

Cv. 5.7 Spočítejte determinanty matic nad příslušnými tělesy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_5, \qquad B = \begin{pmatrix} i-1 & 1 & 0 \\ 1 & i & i \\ 2 & 1 & i+i \end{pmatrix} \text{ nad } \mathbb{C}.$$

6. Determinanty – použití

Aplikace determinantu

Cv. 6.1 Vyřešte následující soustavu rovnic pomocí Cramerova pravidla.

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 7 \\ -1 & 1 & -2 & -6 \\ 3 & -1 & 3 & 10 \end{array}\right).$$

Cv. 6.2 Vyřešte následující soustavu rovnic s parametrem $a \in \mathbb{R}$ pomocí Cramerova pravidla.

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cc|c} a & 1 & 3 \\ 2 & 1 & a \end{array}\right).$$

Cv. 6.3 Pomocí determinantu určete obsah trojúhelníku s vrcholy

(a) $a = (1,1)^T$, $b = (2,5)^T$, $c = (3,2)^T$,

(b) $a = (1,3,1)^T$, $b = (3,3,3)^T$, $c = (3,1,2)^T$.

Cv. 6.4 Určete objem elipsoidu, který vznikne obrazem jednotkové koule při zobrazení $x \mapsto Ax$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Adjungovaná matice

Cv. 6.5 Spočítejte adjungovanou matici k matici A a ověřte vztah $A\,\mathrm{adj}(A) = \det(A) I_n$

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$,

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Cv. 6.6 Vyjádřete $\mathrm{adj}(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix})$.

Cv. 6.7 Spočítejte adjungovanou matici k následujícím maticím:

(a) I_n,

(b) $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}$.

Cv. 6.8 Vyjádřete $\det(\mathrm{adj}(A))$ vzorečkem pomocí $\det(A)$.