Cv. 6.3 Pomocí determinantu určete obsah trojúhelníku s vrcholy

(a) $a = (1, 1)^T$, $b = (2, 5)^T$, $c = (3, 2)^T$,

(b) $a = (1, 3, 1)^T$, $b = (3, 3, 3)^T$, $c = (3, 1, 2)^T$.

Řešení:

(a) Trojúhelník posuneme o vektor $-(1, 1)^T$, tedy tak, aby vrchol a přešel do počátku. Dostaneme trojúhelník s vrcholy $a' = (0, 0)^T$, $b' = (1, 4)^T$, $c' = (2, 1)^T$. Uvažujme matici

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

jejíž řádky jsou tvořeny vektory b', c'. Z geometrické interpretace determinantu víme, že hodnota $|\det(M)|$ udává obsah rovnoběžníku, určeného vektory b', c'. Zadaný trojúhelník má poloviční obsah, proto je hledaná hodnota

$$\frac{1}{2}|\det(M)| = \frac{1}{2}|-7| = \frac{7}{2}.$$

(b) Postupujeme analogicky, jako v předchozím případě. Posuneme trojúhelník o vektor $-(1, 3, 1)^T$, čímž se vrchol a posune do počátku. Dostaneme trojúhelník s vrcholy $a' = (0, 0, 0)^T$, $b' = (2, 0, 2)^T$, $c' = (2, -2, 1)^T$. Nyní sestavíme matici

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

jejíž řádky jsou tvořeny vektory b', c'. Protože matice není čtvercová, obsah rovnoběžníku, určeného vektory b', c', určíme nyní podle obecnějšího vzorce $\sqrt{\det(MM^T)}$. Zadaný trojúhelník má opět poloviční obsah, čili

$$\frac{1}{2}\sqrt{\det(MM^T)} = \frac{1}{2}\sqrt{\det\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}} = \frac{1}{2}\sqrt{36} = 3.$$

Cv. 6.4 Určete objem elipsoidu, který vznikne obrazem jednotkové koule při zobrazení $x \mapsto Ax$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Z geometrické interpretace determinantu víme, že lineární zobrazení $x \mapsto Ax$ mění objemy s faktorem $|\det(A)|$. Jednotková koule má objem $\frac{4}{3}\pi$ a determinant je roven $\det(A) = 9$, čili elipsoid má objem $\frac{4}{3}\pi|\det(A)| = \frac{4}{3}\pi 9 = 12\pi$.

Adjungovaná matice

Cv. 6.5 Spočítejte adjungovanou matici k matici A a ověřte vztah $A\operatorname{adj}(A) = \det(A)I_n$

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$,

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení:

(a) Adjungovanou matici spočítáme podle definice. Adjungovaná matice $\operatorname{adj}(A)$ má stejný rozměr jako matice A a její prvky jsou určené vzorečkem $\operatorname{adj}(A)_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A^{ji})$, kde A^{ji} představuje matici A po odstranění j-tého řádku a i-tého sloupce. Dostaneme

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vztah $A \operatorname{adj}(A) = \det(A) I_n$ ověříme snadno dosazením

$$A \operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \det(A) I_2.$$

(b) Postupujeme opět podle definice. Pro ilustraci ukážeme detailně výpočet prvního řádku adjungované matice:

$$\begin{aligned}
\operatorname{adj}(A)_{11} &= (-1)^{1+1} \det(A^{11}) = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2, \\
\operatorname{adj}(A)_{12} &= (-1)^{1+2} \det(A^{21}) = -\det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -2, \\
\operatorname{adj}(A)_{12} &= (-1)^{1+3} \det(A^{31}) = \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -4.
\end{aligned}$$

Zbylé prvky dopočítáme analogicky. Nakonec dostaneme

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vztah $A \operatorname{adj}(A) = \det(A) I_n$ opět ověříme snadno dosazením

$$A \operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \det(A) I_3.$$

Cv. 6.6 Vyjádřete $\operatorname{adj}\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$.

Řešení:

Podle definice určíme jednotlivé prvky adjungované matice:

$$\operatorname{adj} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Cv. 6.7 Spočítejte adjungovanou matici k následujícím maticím:

(a) I_n,

(b) $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}$.

Řešení:

(a) Zde můžeme využít vzorečku, že pro regulární matici A platí $\operatorname{adj}(A) = \det(A)A^{-1}$. V našem případě $\operatorname{adj}(I_n) = \det(I_n)I_n^{-1} = I_n$.

(b) Zde musíme postupovat z definice, protože obecná diagonální matice nemusí být regulární. Mimodiagonální prvky adjungované matice budou nulové, protože odstraněním j-tého řádku a i-tého sloupce z matice pro $i \neq j$ dostaneme singulární matici (má nulový řádek). Pro i-tý prvek na diagonále máme

$$\operatorname{adj}(D)_{ii} = (-1)^{i+i}\det(D^{ii}) = d_1 \dots d_{i-1}d_{i+1} \dots d_n.$$

Tudíž

$$\operatorname{adj}(D) = \begin{pmatrix} d_2 \dots d_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_1 d_3 \dots d_n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_1 \dots d_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Cv. 6.8 Vyjádřete $\det(\operatorname{adj}(A))$ vzorečkem pomocí $\det(A)$.

Řešení:

Rozlišíme dva případy:

1. Nechť A je regulární: Potom podle známých vzorců vyjádříme

$$\begin{aligned} \det(\operatorname{adj}(A)) &= \det(\det(A)A^{-1}) = \det(A)^n \det(A^{-1}) \\ &= \det(A)^n \det(A)^{-1} = \det(A)^{n-1}. \end{aligned}$$

2. Nechť A je singulární. Potom $\det(A) = 0$ a tudíž $A\operatorname{adj}(A) = \det(A)I_n = 0$. Rozlišíme dva podpřípady: Pokud je $A = 0$, potom $\operatorname{adj}(A) = 0$ a dostaneme $\det(\operatorname{adj}(A)) = 0$. Pokud $A \neq 0$, potom $\operatorname{adj}(A)$ je singulární, neboť regulární matice se nemůže s nenulovou maticí vynásobit na nulovou (což pokrývá definici regulární matice, která říká, že s nenulovým vektorem se nemůže vynásobit na nulový vektor). Tudíž opět dostáváme $\det(\operatorname{adj}(A)) = 0$.

Závěr: Zahrnuvše oba případy, můžeme tvrdit, že $\det(\operatorname{adj}(A)) = \det(A)^{n-1}$.

7. Vlastní čísla – základy

Cv. 7.1 Vlastní vektor matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ reprezentuje směr, který se při lineárním zobrazení $f(x) = Ax$ zobrazí opět na ten samý směr (mění se tedy pouze velikost nebo orientace vektoru). Pro vlastní vektor v matice A tedy platí, že přímka $\operatorname{span}\{v\}$ se při zobrazení f zobrazí do sebe sama. Příslušné vlastní číslo matice pak představuje škálování v tomto invariantním směru.

Následující matice reprezentují geometrická zobrazení v rovině. Nalezněte jejich vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory a pokuste se je geometricky vysvětlit:

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

(b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

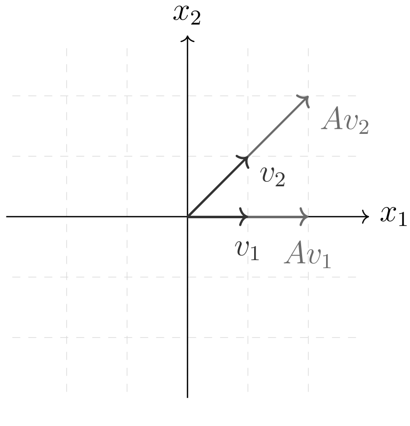
(d) $D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení:

(a) Lineární zobrazení $f(x) = Ax$ odpovídá dvojnásobnému zvětšení vektoru x, tedy

$$f\left((x_1, x_2)^T\right) = 2(x_1, x_2)^T.$$

Libovolný nenulový vektor $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ je proto vlastním vektorem matice A – zobrazení f ho dvakrát prodlouží, ale nezmění jeho směr. Vlastním číslem matice A je $\lambda = 2$ odpovídající škálování vektoru x při zobrazení f.

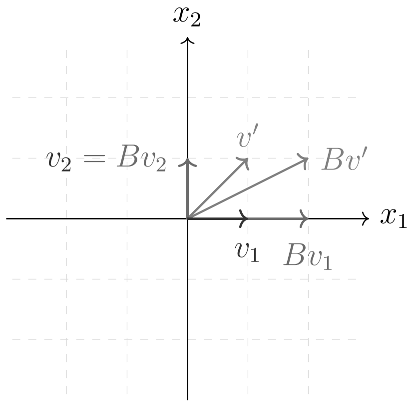


(b) Lineární zobrazení $f(x) = Bx$ odpovídá dvojnásobnému zvětšení vektoru x v první souřadnici, tedy

$$f\left((x_1, x_2)^T\right) = (2x_1, x_2)^T.$$

Vektory na ose x_1 se dvojnásobně prodlouží a nezmění svůj směr – každý vektor ve tvaru $(\alpha, 0)$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je tedy vlastním vektorem matice B s příslušným vlastním číslem $\lambda_1 = 2$.

Vektory na ose x_2 se při zobrazení f nezmění, proto také každý vektor $(0, \alpha)$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je vlastním vektorem B a odpovídá vlastnímu číslu $\lambda_2 = 1$. Vektory mimo osy při zobrazení f mění směr.



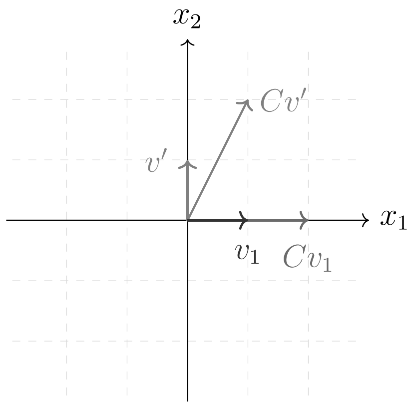
(c) Lineární zobrazení $f(x) = Cx$ odpovídá zkosení a zároveň zvětšení, pro zobrazení platí

$$f\left((x_1, x_2)^T\right) = (2x_1 + x_2, 2x_2)^T.$$

Vlastní vektory matice C jsou všechny nenulové vektory $(\alpha, 0)$ ležící na ose x_1, protože tyto vektory při zobrazení f směr nemění. Tyto vektory zobrazení dvojnásobně prodlužuje, protože platí

$$f\left((\alpha, 0)^T\right) = (2\alpha, 0)^T = 2(\alpha, 0)^T,$$

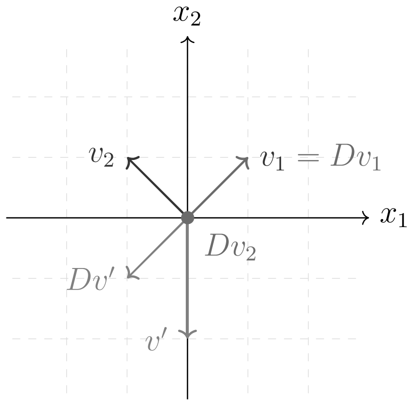
příslušné vlastní číslo je tedy $\lambda = 2$.



(d) Lineární zobrazení $f(x) = Dx$ odpovídá kolmé (ortogonální) projekci na osu 1. a 3. kvadrantu (tedy přímku $x_1 = x_2$), platí

$$f\left((x_1, x_2)^T\right) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2, x_1 + x_2)^T.$$

Nenulové vektory ležící na této ose se při projekci f zobrazí samy na sebe, jsou tedy vlastními vektory matice D. Nemění se ani velikost a orientace těchto vektorů, odpovídající vlastní číslo je proto $\lambda_1 = 1$.



Dalšími vlastními vektory jsou všechny nenulové vektory kolmé na osu 1. a 3. kvadrantu, tj. vektory ve tvaru $(-\alpha, \alpha)$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tyto vektory se při projekci f zobrazí do počátku $(0, 0)$, odpovídající vlastní číslo je $\lambda_2 = 0$ (vektory se škálují na 0-násobek původní délky). Můžeme snadno ověřit, že podmínka z definice vlastního čísla a vlastního vektoru je splněna i pro tento případ:

$$Dx = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot x.$$

Cv. 7.2 Určete charakteristický polynom a nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory následujících matic nad tělesem $\mathbb{C}$. Jsou vlastní vektory jednoznačné?

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$,

(b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$,

(c) $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Řešení:

(a) Charakteristický polynom matice A vzhledem k proměnné λ je polynom

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n).$$

Jelikož jsou vlastní čísla matice A právě kořeny polynomu $p_A(\lambda)$, můžeme charakteristický polynom využít pro jejich výpočet.
Pro zadanou matici A dostaneme charakteristický polynom

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) &= \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 6 \\ 6 & -3-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)(-3-\lambda) - 6 \cdot 6. \end{aligned}$$

Dále můžeme tento polynom upravit a najít jeho kořeny:

$$p_A(\lambda) = (2-\lambda)(-3-\lambda) - 6 \cdot 6 = \lambda^2 + \lambda - 42 = (\lambda - 6)(\lambda + 7).$$

Kořeny polynomu, a tedy vlastními čísly matice A, jsou hodnoty $\lambda_1 = 6$ a $\lambda_2 = -7$.

Vlastní vektor příslušný k danému vlastnímu číslu λ najdeme jako bázi jádra matice $A - \lambda I_n$. Pro vlastní číslo $\lambda_1 = 6$ tedy hledáme bázi jádra matice

$$\begin{pmatrix} 2-6 & 6 \\ 6 & -3-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix},$$

kterou tvoří např. vektor $x_1 = (3,2)^T$. Podobně pro $\lambda_2 = -7$ hledáme bázi $\mathrm{Ker}(A - \lambda_2 I_2)$, tj. bázi jádra matice

$$\begin{pmatrix} 2-(-7) & 6 \\ 6 & -3-(-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tu tvoří např. vektor $x_2 = (2,-3)^T$.

Matice A má tedy vlastní číslo $\lambda_1 = 6$ s odpovídajícím vlastním vektorem $x_1 = (3,2)^T$ a vlastní číslo $\lambda_2 = -7$ s odpovídajícím vlastním vektorem $x_2 = (2,-3)^T$. Vlastní vektory nejsou určeny jednoznačně – každý nenulový násobek vlastního vektoru je také vlastním vektorem.

(b) Charakteristický polynom matice B je

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -2 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda(2-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 2\lambda + 2. \end{aligned}$$

Tento polynom má pouze komplexní kořeny, a to

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = 1 \pm i.$$

Vlastní vektor pro $\lambda_1 = 1 + i$ tvoří bázi jádra matice

$$\begin{pmatrix} 0-(1+i) & 1 \\ -2 & 2-(1+i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-i & 1 \\ -2 & 1-i \end{pmatrix}.$$

Bázi jádra najdeme (stejně jako pro reálné matice) pomocí Gaussovy eliminace. Přičtením $(-1+i)$-násobku 1. řádku k 2. řádku dostaneme:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1-i & 1 \\ -2 & 1-i \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} -1-i & 1 \\ -2+(-1-i)(-1+i) & 1-i+1(-1+i) \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} -1-i & 1 \\ -2+2 & 1-i-1+i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1-i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Všechna řešení soustavy $(B - \lambda_1 I_2)x = 0$ jsou ve tvaru $z(1, 1+i)$ pro $z \in \mathbb{C}$. Hledaným vlastním vektorem je tedy např. vektor $x_1 = (1, 1+i)^T$.

Vlastní vektor x_2 pro druhé vlastní číslo $\lambda_2 = 1 - i$ tvoří bázi jádra matice

$$\begin{pmatrix} 0-(1-i) & 1 \\ -2 & 2-(1-i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+i & 1 \\ -2 & 1+i \end{pmatrix},$$

a je to např. vektor $x_2 = (1, 1-i)^T$.

Matice B má tudíž vlastní číslo $\lambda_1 = 1 + i$ s odpovídajícím vlastním vektorem $x_1 = (1, 1+i)^T$ a vlastní číslo $\lambda_2 = 1 - i$ s odpovídajícím vlastním vektorem $x_2 = (1, 1-i)^T$.

(c) Postupujeme obdobně jako u matic 2×2. Charakteristický polynom matice C vyjádříme pomocí determinantu:

$$\begin{aligned}
p_C(\lambda) = \det(C - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} = \\
&= (2-\lambda)(-3-\lambda)(-2-\lambda) + (-1)\cdot 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 5 \cdot 0 - \\
&\quad - 2 \cdot (-3-\lambda) \cdot (-1) - 3 \cdot 0 \cdot (2-\lambda) - (-1) \cdot 5 \cdot (-2-\lambda) \\
&= -(\lambda+1)^3.
\end{aligned}$$

Matice C má tedy vlastní číslo $\lambda = -1$. Dále najdeme bázi jádra matice

$$\begin{pmatrix} 2-(-1) & -1 & 2 \\ 5 & -3-(-1) & 3 \\ -1 & 0 & -2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

kterou tvoří např. $\{(1,1,-1)^T\}$. Matice C má (trojnásobné) vlastní číslo $\lambda = -1$, kterému přísluší jeden vlastní vektor $x = (1,1,-1)^T$.

Cv. 7.3 Určete charakteristický polynom a nalezněte vlastní čísla matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

<u>Řešení:</u>

Charakteristický polynom matice A opět dostaneme jako determinant

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_5) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 7 & -3-\lambda \end{pmatrix}.$$

Pro vyjádření determinantu této matice je výhodné použít Laplaceův rozvoj, např. podle 2. řádku (obsahuje jediný nenulový prvek), následně podle 4. řádku a nakonec podle 3. sloupce. Tím dostaneme charakteristický polynom

$$\begin{aligned}
p_A(\lambda) &= (2-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda)\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 4 & -3-\lambda \end{pmatrix} \\
&= -(2-\lambda)(1-\lambda)^3(1+\lambda).
\end{aligned}$$

Vlastní čísla matice A jsou tedy 2, 1 (trojnásobné) a -1.

Cv. 7.4 Známe tři vlastní čísla matice

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 & -7 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \\ 16 & 4 & 15 & -8 \\ 30 & 4 & 26 & -19 \end{pmatrix},$$