a to $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -4$ a $\lambda_3 = 5$. Dopočítejte zbylé vlastní číslo.

Řešení:
K řešení úlohy můžeme využít znalost vztahů mezi součinem vlastních čísel a determinantem matice, respektive mezi součtem vlastních čísel a stopou matice:

$$\det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n, \qquad \mathrm{trace}(A) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n.$$

Výpočet determinantu je pracnější, ale i využití tohoto vztahu vede k řešení. Determinant matice A můžeme spočítat např. Gaussovou eliminací, dostaneme $\det(A) = -420$. Pro zbylé vlastní číslo potom platí

$$\det(A) = -420 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 = 3 \cdot (-4) \cdot 5 \cdot \lambda_4,$$

tedy $\lambda_4 = -420/(-60) = 7$.

Výhodnější je ale použít vztah mezi součtem vlastních čísel a stopou matice. Stopa matice je součet prvků na diagonále, tedy

$$\mathrm{trace}(A) = \sum_{i=1}^{4} a_{ii} = 10 + 5 + 15 - 19 = 11.$$

Protože je stopa matice zároveň rovná součtu vlastních čísel, platí pro zbylé vlastní číslo

$$\lambda_4 = 11 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 11 - 3 + 4 - 5 = 7.$$

Cv. 7.5 Matice A má vlastní čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ a jim odpovídající vlastní vektory $x_1, \ldots, x_n$. Určete, jak vypadají vlastní čísla a vlastní vektory:

(a) matice A^2,
(b) matice αA,
(c) matice $A + \alpha I_n$,
(d) matice A^T.

Řešení:

(a) Nechť λ_i je vlastní číslo matice A a x_i je jemu příslušný vlastní vektor. Pak podle definice vlastního čísla a vlastního vektoru platí $Ax_i = \lambda_i x_i$. Jak se bude chovat x_i při přenásobení A^2? Dostáváme

$$A^2 x_i = (AA)x_i = A\ (Ax_i) = A\ (\lambda_i x_i) = \lambda_i(A\ x_i) = \lambda_i(\lambda_i x_i) = \lambda_i^2 x_i.$$

Vlastní číslo λ_i se umocní na druhou a vlastní vektor x_i zůstane stejný.

Matice A^2 má tedy vlastní vektory $x_1, \ldots, x_n$ a jim odpovídající vlastní čísla $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$.

(b) Opět dle předpokladu platí $Ax_i = \lambda_i x_i$. Podobně jako v předchozím příkladu se podíváme, jak dopadne výsledek $\alpha A x_i$. Dostáváme

$$(\alpha A)x_i = \alpha(A\ x_i) = \alpha(\lambda_i x_i) = (\alpha\lambda_i)x_i,$$

Matice αA má vlastní vektory $x_1, \ldots, x_n$ a jim odpovídající vlastní čísla $\alpha\lambda_1, \ldots, \alpha\lambda_n$.

(c) Opět dle předpokladu platí $Ax_i = \lambda_i x_i$. Podobně jako v předchozím příkladu se podíváme, jak dopadne výsledek $(A + \alpha I_n)x_i$. Dostáváme

$$(A + \alpha I_n)x_i = Ax_i + (\alpha I_n)x_i = \lambda_i x_i + \alpha x_i = (\lambda_i + \alpha)x_i.$$

Matice $(A + \alpha I_n)$ má vlastní vektory $x_1, \dots, x_n$ a jim odpovídající vlastní čísla $\lambda_1 + \alpha, \dots, \lambda_n + \alpha$.

(d) Postup z předchozích podúloh zde nelze přímo aplikovat, musíme využít něčeho jiného. Můžeme využít fakt, že vlastní čísla matice A jsou právě kořeny jejího charakteristického polynomu $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$. Z vlastností determinantu víme, že transpozice matice hodnotu determinantu nemění, tudíž platí

$$\det(A - \lambda I_n) = \det((A - \lambda I_n)^T) = \det(A^T - \lambda I_n).$$

Protože je ale zároveň $\det(A^T - \lambda I_n) = p_{A^T}(\lambda)$ charakteristický polynom matice A^T, má matice A^T stejná vlastní čísla jako matice A.

Vlastní vektory matice a její transpozice mohou být obecně různé, např. matice $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ má vlastní vektory ve tvaru $(\alpha, 0)^T$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus 0$, zatímco matice $A^T = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ má vlastní vektory ve tvaru $(0, \alpha)^T$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus 0$.

Cv. 7.6 Ukažte, že jeden vlastní vektor matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nemůže příslušet různým vlastním číslům.

Řešení:

Buď x vlastní vektor matice A. Pro spor předpokládejme, že x přísluší vlastním číslům λ_1, λ_2, přičemž $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Podle definice vlastního čísla a vlastního vektoru platí $Ax = \lambda_1 x$ a zároveň $Ax = \lambda_2 x$. Potom ale dostáváme $\lambda_1 x = \lambda_2 x$, neboli

$$\lambda_1 x - \lambda_2 x = (\lambda_1 - \lambda_2)x = 0.$$

To znamená, že platí $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ nebo $x = 0$. Vlastní vektor x je z definice nenulový, musí proto platit $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, a tedy $\lambda_1 = \lambda_2$, což je spor s předpokladem $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Cv. 7.7 Najděte nejmenší číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, že $A + \beta I_n$ je regulární pro všechny $\beta > \alpha$.

Řešení:

Využijeme charakterizace, že matice je regulární právě tehdy, když jsou všechna její vlastní čísla nenulová. Nechť $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ jsou ta vlastní čísla matice A, která jsou reálná (ta ryze komplexní můžeme ignorovat). Ze cvičení 7.5(c) víme, že se vlastní čísla matice $(A + \beta I_n)$ rovnají $\lambda_1 + \beta \geq \cdots \geq \lambda_n + \beta$. Protože chceme regularitu pro všechny $\beta > \alpha$, musí dokonce platit nezápornost vlastních čísel, $\lambda_1 + \beta \geq \cdots \geq \lambda_n + \beta \geq 0$. V opačném případě, kdy máme jedno vlastní číslo záporné snadno najdeme $\beta' > \beta$ takové, že jemu odpovídající vlastní číslo $(A + \beta' I_n)$ bude nulové, a matice bude singulární.

Hodnotu α tedy zvolíme tak, že $\lambda_1 + \alpha \geq \cdots \geq \lambda_n + \alpha = 0$, z čehož odvodíme, že $\alpha = -\lambda_n$.

Cv. 7.8 Známe-li vlastní čísla a vektory matic $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$, jak je spočítat pro matici

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}?$$

Řešení:

Označme vlastní čísla A jako $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ a jim odpovídající vlastní vektory $x_1, \ldots, x_m$. Obdobně pro matici B, mějme vlastní čísla $\mu_1, \ldots, \mu_n$ a jim odpovídající vlastní vektory $y_1, \ldots, y_n$. Pro jednoduchost zde předpokládáme, že existuje plný počet vlastních vektorů. Označme $Mz = \nu z$ jako vlastní číslo ν a vlastní vektor z matice M. Můžeme blokově rozepsat

$$Mz = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Az_1 \\ Bz_2 \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Z toho vyplývá, že $Az_1 = \nu z_1$ a $Bz_2 = \nu z_2$. Vidíme, že podvektory z_1, z_2 mají stejné vlastnosti, jako vlastní vektory A a B s tím rozdílem, že nepožadujeme nenulovost obou z nich zároveň (pouze nenulovost celého z). V závislosti na nulovosti složek z_1, z_2 rozlišíme několik případů:

(a) Pokud $z_1 = o$, musí $z_2 \neq o$ (z je vlastní vektor). Dostáváme

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} o \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o \\ Bz_2 \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} o \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že každý vektor $(o, y_i)^T$ je vlastním vektorem M s odpovídajícím vlastním číslem μ_i.

(b) Pokud $z_2 = o$, musí $z_1 \neq o$. Vidíme, že situace je obdobná jako v předchozím případě a proto platí, že vektor $(x_i, o)^T$ je vlastní vektor M odpovídající vlastnímu číslo λ_i.

(c) Případ, kdy $z_1 = o$ a $z_2 = o$ nemůže nastat, protože požadujeme nenulovost vlastního vektoru z.

(d) Pokud $z_1 \neq o$, $z_2 \neq o$, poté z_1 a z_2 odpovídají vlastním vektorům A a B. Pro ty musí platit, že jim odpovídá stejné vlastní číslo ν. Tedy pokud existuje $\lambda_i = \mu_j$, potom $z = (x_i, y_j)^T$ je vlastním vektorem M a $\lambda_i = \mu_j$ je jeho odpovídající vlastní číslo. Všimněme si nicméně, že v takovém případě je vektor $z = (x_i, 0)^T + (0, y_j)^T$ lineární kombinací již nalezených vlastních vektorů.

Vlastní čísla matice M tedy jsou

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \ldots, \mu_n$$

a příslušné vlastní vektory

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ o \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_m \\ o \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} o \\ y_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} o \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Povšimněme si, že vlastní vektory tvaru $(x_i, 0)^T$ a $(0, y_j)^T$ jsou nenulové a lineárně nezávislé (protože $x_1, \ldots, x_m$ byly lineárně nezávislé a $y_1, \ldots, y_n$ také).

Cv. 7.9 Buď $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matice projekce. Jaká má vlastní čísla a vlastní vektory?

Řešení:

Pro určení vlastních čísel matice projekce můžeme využít její vlastnost, že opakovaná projekce má stejný efekt, jako projekce samotná, neboli $P^2 = P$. Nechť λ je vlastní číslo P a x odpovídající vlastní vektor. Dostáváme,

$$P^2x = P(Px) = P(\lambda x) = \lambda(Px) = \lambda^2 x$$

a zároveň

$$P^2x = Px = \lambda x.$$

Z toho plyne, že $\lambda^2 = \lambda$, neboli $\lambda(\lambda - 1) = 0$. Vlastní čísla matice P jsou proto pouze 1 a 0.

Vlastní vektory odpovídající vlastnímu číslu 1 splňují $Px = x$. Z vlastností projekce tento vztah splňují všechny vektory $x \in V$, kde $V = \mathcal{S}(P)$ je podprostor, do kterého matice P projektuje. Jako lineárně nezávislou podmnožinu vlastních vektorů zvolíme libovolnou bázi prostoru V. Označíme-li $m = \dim(V) = \operatorname{rank}(P)$, tak jsme našli m vlastních vektorů pro vlastní číslo 1.

Vlastnímu číslu 0 odpovídají vektory splňující $Px = o$. To jsou ale vektory $x \in \operatorname{Ker}(P)$, jako lineárně nezávislou podmnožinu vlastních vektorů tedy zvolíme libovolnou bázi $\operatorname{Ker}(P)$. Z vlastnosti kolmé projekce si můžeme také uvědomit, že $\operatorname{Ker}(P) = V^{\perp}$. Našli jsme tedy $n - m$ vlastních vektorů pro vlastní číslo 0.

Celkem tak máme $m + (n - m) = n$ vlastních vektorů, takže už žádné jiné vlastní vektory, a tím pádem ani vlastní čísla, neexistují. Vlastní číslo 1 je m-násobné a vlastní číslo 0 je $(n - m)$-násobné.

Cv. 7.10 Buď $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(a) Ověřte Cayleyho-Hamiltonovu větu,

(b) Vyjádřete A^4 jako lineární kombinaci I_2 a A,

(c) Vyjádřete A^{-1} jako lineární kombinace I_2 a A.

Řešení:

(a) Věta říká, že pro charakteristický polynom matice $p_A(\lambda)$ platí, že $p_A(A) = 0$. Určíme

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 2.$$

Dosadíme A,

$$p_A(A) = A^2 - 5A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Pro vyjádření A^4 musíme λ^4 vydělit polynomem $p_A(\lambda)$ se zbytkem, čímž získáme tvar $\lambda^4 = r(\lambda)p_A(\lambda) + s(\lambda)$. Po dosazení $\lambda = A$ dostaneme $A^4 = s(A)$, protože $p_A(A) = 0$. Spočítáme

$$\begin{aligned} \lambda^4 &= r(\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda - 2) + s(\lambda) \\ &= (\lambda^2 + 5\lambda + 27)(\lambda^2 - 5\lambda - 2) + 145\lambda + 54, \end{aligned}$$

kde zbytek $s(\lambda) = 145\lambda + 54$. Dosazením máme požadované vyjádření

$$A^4 = s(A) = 145A \ + 54I_2.$$

Vztah můžeme ověřit zkouškou – levá i pravá strana výrazu dá stejnou matici

$$A^4 = \begin{pmatrix} 199 & 290 \\ 435 & 634 \end{pmatrix}.$$

(c) Podle Cayleyho-Hamiltonovy věty platí

$$0 = p_A(A) = A^2 - 5A - 2I_2.$$

Rovnici vynásobíme maticí A^{-1} a získáme

$$0 = A - 5I_n - 2A^{-1}.$$

Z této rovnice už snadno vyjádříme A^{-1} jako

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A - 5 \cdot I_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

8. Vlastní čísla – diagonalizovatelnost

Cv. 8.1 Vyšetřete vlastnost *podobnosti* jako relace.

Řešení:
Podle definice jsou dvě matice $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ podobné $A \sim B$, pokud existuje regulární $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ taková, že $A = SBS^{-1}$.

Reflexivita. Nejprve vyšetříme, zda je podobnost reflexivní. To by znamenalo, že existuje S taková, že $A = SAS^{-1}$. Okamžitě vidíme, že za S můžeme dosadit $S = I_n$, tedy podobnost je reflexivní relace.

Symetrie. Symetrie říká, že pokud $A = SBS^{-1}$, potom existuje regulární matice T taková, že $B = TAT^{-1}$. Přenásobením první rovnosti maticí S^{-1} zleva a maticí S zprava dostáváme výraz $S^{-1}AS = B$, tedy můžeme volit $T = S^{-1}$. Podobnost je symetrická relace.

Tranzitivita. Tranzitivita říká, že pokud $A \sim B$ a $B \sim C$, potom $A \sim C$. Jinými slovy, pokud existují regulární matice S, T takové, že $A = SBS^{-1}$ a $B = TCT^{-1}$, poté existuje regulární matice U taková, že $A = UCU^{-1}$. Dosazením druhé rovnice do první dostáváme

$$A = SBS^{-1} = S(TCT^{-1})S^{-1} = (ST)C(T^{-1}S^{-1}) = (ST)C(ST)^{-1}.$$

Vidíme, že za matici U můžeme volit $U = ST$. Tato matice bude regulární, protože součin dvou regulárních matic je opět regulární matice.

Relace podobnosti matic je tedy reflexivní, symetrická a tranzitivní, je to tudíž relace ekvivalence.

Cv. 8.2 Rozhodněte o platnosti $A \sim B \;\Rightarrow\; A^2 \sim B^2$. Jak to bude s opačnou implikací?

Řešení:
Pokud $A \sim B$, potom existuje regulární matice S taková, že $A = SBS^{-1}$. Chceme rozhodnout, zda poté existuje regulární matice T taková, že $A^2 = TB^2T^{-1}$. Pomocí prvního vztahu můžeme matici A^2 vyjádřit jako

$$A^2 = (SBS^{-1})(SBS^{-1}) = SB(S^{-1}S)BS^{-1} = SBBS^{-1} = SB^2S^{-1}.$$

Vidíme tedy, že můžeme volit matici $T = S$, a tudíž implikace platí.

Opačná implikace obecně platit nebude. Ke konstrukci protipříkladu můžeme využít například vztahu, že podobné matice mají stejná vlastní čísla. Zvolme $A = I_n$ a $B = -I_n$. Diagonální matice mají vlastní čísla na diagonále, proto vlastní číslo matice A je 1 s algebraickou násobností n a vlastní číslo matice B je -1 s algebraickou násobností n. Matice A a B tedy nejsou podobné. Nicméně, $A^2 = I_n$ a $B^2 = (-I_n)(-I_n) = I_n$. Platí dokonce $A^2 = B^2$ a z reflexivity podobnosti tedy vyplývá, že $A^2 \sim B^2$.

Cv. 8.3 Určete, zda jsou následující matice diagonalizovatelné:

(a) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -5 & 1 \end{pmatrix}$,

(b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) $C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

(d) $D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Řešení:
K určení diagonalizovatelnosti matice musíme rozhodnout, zda matice má n lineárně nezávislých vlastních vektorů. Spočítáme tedy vlastní čísla matice a určíme, kolik jim přísluší vlastních vektorů. Jinými slovy, rozhodneme, zda algebraická a geometrická násobnost každého vlastního čísla je stejná. Vlastní vektory počítat nemusíme, to k rozhodnutí ohledně diagonalizovatelnosti není potřeba (je to potřeba k sestrojení spektrálního rozkladu, což zde nepožadujeme).

(a) Spočtěme tedy vlastní čísla matice A jakožto kořeny jejího charakteristického polynomu. Charakteristický polynom matice A je

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) &= -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 14\lambda + 8 = \\ &= (4-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda). \end{aligned}$$

Vlastní čísla jsou tedy $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$ a $\lambda_3 = 1$. Protože jsou navzájem různá, je matice nutně diagonalizovatelná.

(b) Postupujeme stejně jako u matice A, jen zde vyjdou komplexní vlastní čísla. Charakteristický polynom matice B se rovná $p_B(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$. Kořeny polynomu $p_B(\lambda)$ jsou $1+i$ a $1-i$. Opět jsou vlastní čísla navzájem různá, matice je tedy diagonalizovatelná.

(c) Charakteristický polynom matice C je $p_C(\lambda) = (5-\lambda)^2$. Matice C má tedy vlastní číslo 5 s algebraickou násobností 2. Geometrická násobnost vlastního čísla je rovna číslu

$$\operatorname{rank}(C - \lambda I_2) = \operatorname{rank}(C - 5 \cdot I_2) = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Proto k vlastnímu číslu 0 existuje pouze jediný vlastní vektor, a matice C tudíž není diagonalizovatelná.

(d) Matice D je horní trojúhelníková, její vlastní čísla jsou tedy prvky na diagonále. Konkrétně, je to jednonásobné vlastní číslo $\lambda_1 = 2$ a dvojnásobné vlastní číslo $\lambda_2 = 7$. K prvnímu vlastnímu číslu existuje pouze jeden vlastní vektor, ale jak to bude s druhým vlastním číslem? Hodnost matice

$$D - \lambda_1 I_3 = D - 7 \cdot I_3 = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je jedna, což znamená, že k λ_2 náleží dva vlastní vektory. Dohromady tak máme plný počet vlastních vektorů, a proto je matice D diagonalizovatelná.

Cv. 8.4 Rozložte následující matice na součin SDS^{-1}, kde matice S je regulární a matice D je diagonální:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}^T$,

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

Řešení:
Spočítáme vlastní čísla a vlastní vektory dané matice. Pokud je vlastních vektorů plný počet, tj. je jich n lineárně nezávislých, sestrojíme samotný rozklad SDS^{-1} tak, že diagonálu D budou tvořit vlastní čísla matice a sloupce matice S budou tvořit vlastní vektory matice.

(a) Charakteristický polynom matice je $p(\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda)(4-\lambda)$, vlastní čísla jsou tedy $2, 1, 4$. Těm odpovídají vlastní vektory $(1, 2, 2)^T$, $(0, 1, 0)^T$, $(0, 1, 1)^T$, které jsou lineárně nezávislé. Dostáváme

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Pro výpočet můžeme využít vztahu matice A a A^T. Pokud $A = SDS^{-1}$, potom
$$A^T = (SDS^{-1})^T = (S^{-1})^T D^T S^T = (S^{-1})^T D S^T.$$
Po dosazení z předchozí podúlohy dostáváme rozklad

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Charakteristický polynom matice je $(4-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)$, vlastní čísla jsou tedy $4, 2, 1$. Těm odpovídají vl. vektory $(0, 1, 1)^T$, $(1, 2, 1)^T$, $(2, 1, 0)^T$, které jsou lineárně nezávislé. Dostáváme

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cv. 8.5 Najděte chybu v následující úvaze: Vyjděme z rovnice $Ax = \lambda x$. Je-li vlastní číslo $\lambda = 0$, pak $x \in \operatorname{Ker}(A)$. Je-li vlastní číslo $\lambda \neq 0$, pak $x \in \mathcal{S}(A)$. Protože $\dim \operatorname{Ker}(A) + \dim \mathcal{S}(A) = n$, má matice A plný počet vlastních vektorů a je tudíž diagonalizovatelná.

Řešení:
Skutečně platí, že každý vlastní vektor náleží do $\mathrm{Ker}(A)$ nebo $\mathcal{S}(A)$. Platí ale opačný směr? Libovolný vektor z $\mathrm{Ker}(A)$ je vlastním vektorem, který přísluší nulovému vlastnímu číslu. Ale ne každý vektor ze sloupcového prostoru $\mathcal{S}(A)$ musí být vlastním vektorem matice A. Například matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

má jediný vlastní vektor $x = (1,0)^T$. Proto první sloupec matice je vlastním vektorem, ale druhý sloupec není.

Cv. 8.6 Dokažte přímo Cayleyho-Hamiltonovu větu pro diagonalizovatelné matice.

Řešení:
Cayleho-Hamiltonova věta říká, že pokud pro matici $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ máme charakteristický polynom $p_A(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$, poté

$$p_A(A) = (-1)^n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n = 0.$$

Pro diagonalizovatelné matice platí, že existuje regulární S taková, že $A = SDS^{-1}$, kde D je diagonální matice s vlastními čísly na diagonále. Dosaďme do levé strany rovnice

$$(-1)^n(SDS^{-1})^n + a_{n-1}(SDS^{-1})^{n-1} + \cdots + a_1 SDS^{-1} + a_0 I_n.$$

Dále, protože $A^k = (SDS^{-1})^k = SD^kS^{-1}$, můžeme výraz upravit na

$$(-1)^n SD^nS^{-1} + a_{n-1}SD^{n-1}S^{-1} + \cdots + a_1 SDS^{-1} + a_0 I_n.$$

Vytkněme z výrazu matici S zleva a matici S^{-1} zprava, dostáváme

$$S((-1)^n D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 I_n)S^{-1}.$$

Matice $M \coloneqq (-1)^n D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 I_n$ má složky

$$M_{ij} = \begin{cases} (-1)^n 0^n + a_{n-1}0^{n-1} + \cdots + a_1 0 + a_0 0 = 0 & \text{pro } i \neq j, \\ (-1)^n \lambda_i^n + a_{n-1}\lambda_i^{n-1} + \cdots + a_1\lambda_i + a_0 = p_A(\lambda_i) = 0 & \text{pro } i = j. \end{cases}$$

Matice M je tedy nulová. Dostáváme proto

$$p_A(A) = SMS^{-1} = S\,0\,S^{-1} = 0,$$

čímž je tvrzení dokázáno.