9. Vlastní čísla – Jordanova normální forma a symetrické matice

Jordanova normální forma

Cv. 9.1 Najděte

(a) matici řádu 3 s jediným vlastním vektorem (libovolným),
(b) matici řádu 3 s jediným vlastním vektorem $v = (1, 1, 1)^T$.

Řešení:

(a) Matice musí mít Jordanovu normální formu ve tvaru jediné Jordanovy buňky velikosti 3. Můžeme tedy volit přímo Jordanovu buňku

$$J_3(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

kde λ je libovolné číslo.

(b) Vyjdeme z předchozího příkladu a zvolíme například matici

$$J_3(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vlastní vektor této matice je jediný, ale je to vektor $e_1 = (1, 0, 0)^T$. Pokud chceme změnit vlastní vektor, ale zachovat vlastní čísla a jejich algebraické a geometrické násobnosti, můžeme využít podobnosti a uvažovat matici ve tvaru $A = S^{-1}J_3(0)S$. Aby byl vektor v vlastním vektorem a číslo λ vlastním číslem matice A, musí platit $Av = \lambda v$, čili $S^{-1}J_3(0)Sv = \lambda v$. Přenásobením maticí S zleva dostaneme $J_3(0)Sv = \lambda Sv$. Tudíž vektor Sv je vlastním vektorem matice $J_3(0)$, což znamená $Sv = e_1$. Hledáme tedy regulární matici S takovou, aby platilo

$$S \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Takových matic existuje mnoho, zvolíme například

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hledaná matice potom je

$$\begin{aligned} A &= S^{-1}J_3(0)S \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Můžeme pak ověřit, že tato matice splňuje zadání: Matice A má jediné vlastní číslo 0, které je trojnásobné a přísluší mu jediný vlastní vektor v.

Cv. 9.2 V kolika Jordanových buňkách matice $A \in \mathbb{R}^{16\times 16}$ je vlastní číslo 8, pokud víme, že $\operatorname{rank}(A - 8I_{16}) = 9$?

Řešení:

Počet všech Jordanových buněk odpovídajících vlastnímu číslu λ je roven počtu vlastních vektorů pro λ, tedy hodnotě $n - \operatorname{rank}(A - \lambda I_n)$. V našem případě $n - \operatorname{rank}(A - 8I_n) = 16 - 9 = 7$. Tedy vlastní číslo 8 je v sedmi Jordanových buňkách.

Cv. 9.3 Najděte Jordanovu normální formu matic

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Matice A je trojúhelníková, její vlastní čísla jsou tedy prvky na diagonále. Konkrétně matice A má vlastní číslo $\lambda_1 = 1$ (dvojnásobné) a $\lambda_1 = 2$ (jednonásobné). Vlastní číslo λ_2 leží v jedné Jordanově buňce velikosti 1, ale λ_1 může ležet v jedné nebo dvou Jordanových buňkách. Spočítáme proto $\operatorname{rank}(A - \lambda_1 I_3) = 1$, což říká, že geometrická násobnost λ_1 je dva, čili přísluší mu dva vlastní vektory. Hledaná Jordanova normální forma je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matice B má také dvojnásobné vlastní číslo $\lambda_1 = 1$ a jednonásobné vlastní číslo $\lambda_2 = 2$. Protože $\operatorname{rank}(B - \lambda_1 I_3) = 2$, přísluší k vlastnímu číslo λ_1 pouze jeden vlastní vektor a tudíž λ_1 leží v Jordanově buňce velikosti 2. Jordanova normální forma matice B je

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matice C má dvojnásobné vlastní číslo $\lambda_1 = 1$ a dvojnásobné vlastní číslo $\lambda_2 = 3$. Protože $\operatorname{rank}(C - \lambda_1 I_3) = 2$ a $\operatorname{rank}(C - \lambda_2 I_3) = 3$, vlastní číslo λ_1 leží ve dvou buňkách, kdežto λ_2 leží v jedné buňce. Jordanova normální forma matice C je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cv. 9.4 Určete, kolik je tříd ekvivalence podobnosti pro:

(a) matice řádu 4, které mají pouze vlastní číslo 7,

(b) matice řádu 3 s vlastními čísly 5 a 7.

Řešení:

(a) Každá matice je podobná matici v Jordanově normální formě, která je jednoznačná až na pořadí buněk na diagonále. Stačí tedy spočítat, kolik je různých tvarů matic v Jordanově normální formě. Pokud je vlastní číslo 7

- čtyřnásobné, pak je jediná možnost s buňkami $J_1(7), J_1(7), J_1(7), J_1(7)$;
- trojnásobné, pak je jediná možnost s buňkami $J_2(7), J_1(7), J_1(7)$;
- dvojnásobné, pak existují dvě možnosti s buňkami $J_2(7), J_2(7)$ nebo $J_1(7), J_3(7)$;
- jednonásobné, pak je jediná možnost s buňkami $J_4(7)$.

Souhrnem máme 5 tříd ekvivalence s reprezentanty

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

(b) Provedeme obdobný rozbor:

- Matice má vlastní číslo 5 dvojnásobné a vlastní číslo 7 jednonásobné. Pak Jordanův normální tvar se může skládat z buněk $J_1(5), J_1(5), J_1(7)$ nebo z buněk $J_2(5), J_1(7)$.
- Matice má vlastní číslo 5 jednonásobné a vlastní číslo 7 dvojnásobné. To je opačná situace k předchozí. Jordanův normální tvar se může skládat z buněk $J_1(5), J_1(7), J_1(7)$ nebo z buněk $J_1(5), J_2(7)$.

Jiná situace než ty výše zmíněné nastat nemůže, protože každé vlastní číslo musí mít násobnost aspoň 1. Dostali jsme dohromady 4 třídy ekvivalence s reprezentanty

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Cv. 9.5 Najděte Jordanovu normální formu matice $J_n(\lambda)^T$.

Řešení:

Matice $J_n(\lambda)^T$ má stejné spektrální vlastnosti jako matice $J_n(\lambda)$: přísluší jí pouze vlastní číslo λ (je to trojúhelníková matice, takže vlastní čísla má na diagonále), které je algebraicky n-násobné, ale geometricky jednonásobné, protože mu přísluší jediný vlastní vektor (hodnost matice $J_n(\lambda)^T - \lambda I_n = J_n(0)^T$ je $n-1$). Jordanovu normální forma matice $J_n(\lambda)^T$ je opět $J_n(\lambda)$.

Poznámka. Mohla by nás zajímat matice podobnosti, tedy matice S, pro kterou platí $J_n(\lambda)^T = SJ_n(\lambda)^T S^{-1}$. Tuto vlastnost má například permutační matice

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Cv. 9.6 O kolik se maximálně zmenší hodnost matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ když ji umocníme A^2?

Řešení:

Umocněním se hodnost matice nemůže zvýšit, tedy $\operatorname{rank}(A^2) \leq \operatorname{rank}(A)$. Nicméně, hodnost se může zmenšit. Cílem cvičení je ukázat, že se nemůže zmenšit o libovolnou hodnotu.

Matice A je podobná matici J v Jordanově normální formě, $A = SJS^{-1}$. Protože $A^2 = SJ^2S^{-1}$ a obě matice A, J mají stejnou hodnost, stačí úvahu omezit na matice v Jordanově normální formě a na jednotlivé Jordanovy buňky.

Uvažujme Jordanovu buňku $J_k(\lambda)$, kde $\lambda \neq 0$. Potom je buňka regulární a její druhá mocnina také, tím pádem ke snížení hodnosti nedojde. Pro nejhorší případ stačí uvažovat Jordanovy buňky s $\lambda = 0$. Pro $k = 1$ je Jordanova buňka i její mocnina nulová a opět mají stejnou hodnost. Nechť $k \geq 2$. Hodnost matice $J_k(0)$ je $k-1$ a hodnost druhé mocniny $J_k(0)^2$ je $k-2$. Tudíž umocněním dojde je snížení hodnosti bez ohledu na velikost Jordanovy buňky. Nejhorší případ tedy je, když je buněk velikosti $k \geq 2$ co nejvíce, a tedy když mají velikost 2. To znamená, že matice má na diagonále pouze Jordanovy buňky $J_2(2)$ (případně navíc jednu buňku $J_1(0)$, pokud je n liché). Potom se umocněním sníží hodnost o počet buněk, tedy o $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Dokázali jsme tak vztah

$$\operatorname{rank}(A^2) \geq \operatorname{rank}(A) - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

a tato mez je těsná, to znamená, že se nabyde jako rovnost pro každé n a určitou matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$; takovou matici jsme zkonstruovali postupem nahoře.

Symetrické matice

Cv. 9.7 Ukažte, že spektrální rozklad $A = Q\Lambda Q^T$, kde Λ je diagonální a Q ortogonální, existuje pouze pro symetrické matice.

Řešení:

Pro symetrické matice víme z přednášky, že spektrální rozklad existuje. Protože matice $Q\Lambda Q^T$ je symetrická, takovýto rozklad pro nesymetrické matice nemůže nastat.

Cv. 9.8 Najděte spektrální rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Vlastní čísla matice A jsou 3 a 0 (dvojnásobné). K vlastnímu číslu 3 přísluší vlastní vektor $(1,1,1)^T$. K vlastnímu číslu 0 přísluší vlastní vektory například $(1,-1,0)^T$, $(1,0,-1)^T$. Pokud sestavíme matice

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

dostaneme spektrální rozklad $A = S\Lambda S^{-1}$. Nicméně spektrální rozklad symetrické matice vyžaduje ortogonální matici. Musíme tedy vlastní vektory ortonormalizovat. Vlastní vektory pro různá vlastní čísla symetrické matice jsou automaticky na sebe kolmé, čili stačí ortonormalizovat vlastní vektory pro vícenásobná vlastní čísla (ty ostatní pouze znormujeme, aby měly velikost 1). Konkrétně musíme ortonormalizovat dvojici vektorů $(1,-1,0)^T$, $(1,0,-1)^T$. Aplikací Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace dostaneme vektory

$$\tfrac{\sqrt{2}}{2}(1,-1,0)^T, \quad \tfrac{\sqrt{6}}{6}(1,1,-2)^T.$$

Hledaný spektrální rozklad má podobu $A = Q\Lambda Q^T$, kde

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}.$$

Cv. 9.9 Víme, že symetrická matice $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ má vlastní vektor $v = (1,2)^T$. Dopočítejte druhý vlastní vektor.

Řešení:

Protože je matice symetrická, druhý vlastní vektor musí být kolmý na první. Až na násobek máme jednoznačný kolmý vektor. Druhý vlastní vektor je tedy vektor $(2,-1)^T$.

Cv. 9.10 Dokažte, že pro libovolnou matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ má matice A^TA všechna vlastní čísla nezáporná. Kdy budou kladná?

Řešení:

Buď λ vlastní číslo a x odpovídající vlastní vektor matice A^TA. Bez újmy na obecnost můžeme předpokládat, že $\|x\| = 1$. Z rovnice $A^TAx = \lambda x$ přenásobením x^T zleva dostaneme $x^TA^TAx = \lambda x^Tx$, neboli $\|Ax\|^2 = \lambda$. Vlastní číslo λ tedy musí být nezáporné.

Situace $\lambda = 0$ nastane pouze, když $\|Ax\|^2 = 0$, čili když $Ax = o$. To znamená, když sloupce matice A jsou lineárně závislé. Pokud tedy jsou sloupce matice A lineárně nezávislé (tj. $\operatorname{rank}(A) = n$), potom vlastní čísla matice A^TA jsou kladná ($\lambda > 0$).

Cv. 9.11 (a) Dokažte z definice, že vlastní vektory odpovídající různým vlastním číslům symetrické matice jsou na sebe kolmé.

(b) S pomocí předchozího bodu dokažte větu o spektrálním rozkladu přímo pro symetrické matice s různými vlastními čísly.

Řešení:

(a) Buďte λ, μ, $\lambda \neq \mu$, vlastní čísla a u, v odpovídající vlastní vektory symetrické matice A. Pak platí $Au = \lambda u$, $Av = \mu v$. To ale implikuje

$$\lambda v^T u = v^T(\lambda u) = v^T A u = (v^T A u)^T = u^T A^T v = u^T A v = u^T(\mu v) = \mu u^T v.$$

Protože $\lambda \neq \mu$, musí $u^T v = 0$.

(b) Pokud má A různá vlastní čísla, je diagonalizovatelná. Můžeme tedy psát $A = Q\Lambda Q^{-1}$, kde Λ je diagonální matice s vlastními čísly na diagonále a regulární matice Q má odpovídající vlastní vektory ve sloupcích. Protože podle předchozího bodu jsou vlastní vektory na sebe kolmé a lze je volit s normou 1, je Q ortogonální.