11. Positivně (semi-)definitní matice

Positivně definitní matice

Cv. 11.1 Otestujte positivní definitnost matic

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

pomocí:

(a) rekuretního vzorce,

(b) Sylvestrova pravidla,

(c) Gaussovy eliminace.

Cv. 11.2 Otestujte positivní semidefinitnost resp. positivní definitnost následujících matic pomocí vlastních čísel:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Cv. 11.3 Buď A blokově diagonální symetrická matice. Ukažte, že A je positivně definitní právě tehdy, když všechny bloky jsou positivně definitní.

Jak to bude s positivní semidefinitností?

Cv. 11.4 Najděte příklad matice ilustrující, že nefunguje přímočaré zobecnění na testování positivní semidefinitnosti pomocí rekurentního vzorečku, Sylvestrova kritéria pro positivní definitnost a Choleského rozkladu.

Positivně semidefinitní matice

Cv. 11.5 Ověřte positivní semidefinitnost matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

a to všemi třemi způsoby (na základě tří ekvivalentních definic).

Cv. 11.6 Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jsou positivně definitní.

(a) Ukažte, že $A + B$ jsou také positivně definitní.

(b) Jak to bude se součtem positivně semidefinitních matic?

(c) Jak to bude se součtem positivně semidefinitní a positivně definitní matice?

(d) Jak to bude s násobkem positivně definitních matic?

Cv. 11.7 Najděte regulární matici, která je positivně semidefinitní, ale ne positivně definitní.

Cv. 11.8 Ukažte, že libovolná mocnina positivně semidefinitní matice je positivně semidefinitní matice.

Cv. 11.9 Nad symetrickými maticemi z $\mathbb{R}^{n\times n}$ definujme relaci $\preccurlyeq$ předpisem $A \preccurlyeq B$ pokud $B - A$ je positivně semidefinitní. Ukažte, že $\preccurlyeq$ je relace částečného uspořádání.

Cv. 11.10 Buď A positivně semidefinitní. Ukažte, že pokud $x^T Ax = 0$ platí pro nějaké $x \neq o$, potom $Ax = o$.