

11. Positivně (semi-)definitní matice

Positivně definitní matice

Cv. 11.1 Otestujte pozitivní definitnost matic

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

pomocí:

- (a) rekurentního vzorce,
- (b) Sylvestrova pravidla,
- (c) Gaussovy eliminace.

Řešení:

- (a) Rekurentní vzorec nám říká, že symetrická matice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & \tilde{A} \end{pmatrix}$$

je pozitivně definitní právě tehdy, když $\alpha > 0$ a matice $\tilde{A} - \frac{1}{\alpha}aa^T$ je pozitivně definitní. Aplikací dostáváme matici menší dimenze

$$\tilde{A} - \frac{1}{\alpha}aa^T = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} (-2, 4) = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -8 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

K určení pozitivní definitnosti této matice aplikujme vzorec ještě jednou. Dostáváme $2 - \frac{1}{9}3 \cdot 3^T = 1$. Pro matici v prostoru $\mathbb{R}^{1 \times 1}$ víme, že je pozitivně definitní právě tehdy, když je kladná, což zřejmě hodnota 1 splňuje, matice A je proto pozitivně definitní.

Pro matici B postupujeme obdobně. Protože prvek $b_{11} = 1 > 0$, vede první krok rekurence na matici

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} (2 \quad -3) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 7 & -7 \end{pmatrix}.$$

Dle rekurentního vzorečku tato matice není pozitivně definitní (prvek na pozici (1, 1) je 0), tedy ani B není pozitivně definitní.

- (b) Stačí nám zkontrolovat, že determinanty všech hlavních vedoucích podmatic jsou kladné. To jsou matice, která vzniknou vyškrtnutím posledních $n - i$ řádků a sloupců pro $i = 1, \dots, n$.

Pro matici A se jedná o podmatice

$$(4), \quad \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix},$$

jejichž determinanty se rovnají hodnotám 4, 36 a 36. Tyto hodnoty jsou kladné, tedy matice A je pozitivně definitní.

Pro matici B se jedná o podmatice

$$(1), \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

jejichž determinanty jsou 1, 0, a -49 . Hodnoty nejsou kladné, tedy matice B není pozitivně definitní.

- (c) Při provádění Gaussovy eliminace musíme mít na paměti, že máme povolenou pouze operaci přičítání α násobku řádku k řádku pod ním. Důvod najdeme v důkazu příslušného tvrzení, ze kterého je zřejmé, že využíváme vlastnosti rekurentního vzorce.

Pokud u matice A nejprve odečteme příslušné násobky prvního řádku od ostatních a následně násobek druhého od třetího řádku, dostáváme matici

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ta má kladnou diagonálu, tedy se jedná o pozitivně definitní matici.

Postupujeme obdobně pro matici B . Po odečtení příslušného násobku prvního řádku od řádků pod ním dostáváme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 7 & -7 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že k tomu, abychom dokončili eliminaci potřebujeme prohodit 2. a 3. řádek, matice B tedy není pozitivně definitní.

Cv. 11.2 Otestujte pozitivní semidefinitnost resp. pozitivní definitnost následujících matic pomocí vlastních čísel:

- (a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$
 (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$
 (c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

Řešení:

Positivní (semi-)definitnost můžeme otestovat na základě znaménka vlastních čísel. Pro výpočet vlastních čísel matice $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ využijeme vztahů $\lambda_1 \lambda_2 = \det(A)$ a $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{trace}(A) = a_{11} + a_{22}$.

- (a) Dostáváme $\lambda_1 \lambda_2 = 0$ a $\lambda_1 + \lambda_2 = 2$. Řešením je tedy dvojice vlastních čísel 0 a 2. Protože jsou vlastní čísla nezáporná, matice je pozitivně semidefinitní.

- (b) Dostáváme $\lambda_1 \lambda_2 = -3$ a $\lambda_1 + \lambda_2 = 2$. Vlastní čísla tedy jsou -1 a 3 . Matice je tzv. indefinitní, to znamená, že není ani pozitivně semidefinitní, ani negativně semidefinitní.
- (c) Dostáváme $\lambda_1 \lambda_2 = 3$ a $\lambda_1 + \lambda_2 = 4$. Vlastní čísla jsou 3 a 1 . Matice je tedy pozitivně definitní.

Cv. 11.3 Buď A blokově diagonální symetrická matice. Ukažte, že A je pozitivně definitní právě tehdy, když všechny bloky jsou pozitivně definitní.

Jak to bude s pozitivní semidefinitností?

Řešení:

První způsob. Vyjádříme matici A blokově jako

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k \end{pmatrix}.$$

Poté součin $x^T A x$ můžeme vyjádřit jako

$$\begin{aligned} x^T A x &= (x_1^T \quad \dots \quad x_k^T) \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = (x_1^T \quad \dots \quad x_k^T) \begin{pmatrix} A_1 x_1 \\ \vdots \\ A_k x_k \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{i=1}^k x_i^T A_i x_i. \end{aligned}$$

Pokud jsou všechny bloky pozitivně definitní, potom $x_i^T A_i x_i \geq 0$ pro všechna $i = 1, \dots, k$. Protože je vektor x nenulový, musí být nenulový aspoň jeden podvektor x_j , pro něhož platí $x_j^T A_j x_j > 0$. Tím pádem $x^T A x = \sum_{i=1}^k x_i^T A_i x_i > 0$.

Předpokládejme naopak, že existuje blok A_j , který není pozitivně definitní. To znamená, že $x_j^T A_j x_j \leq 0$ pro určité nenulové x_j . Definujme $x_i := 0$ pro $i \neq j$. Potom vektor $x = (x_1^T, \dots, x_k^T)^T$ je nenulový a platí

$$x^T A x = \sum_{i=1}^k x_i^T A_i x_i = x_j^T A_j x_j \leq 0.$$

Matice A proto není pozitivně definitní.

Z postupu je patrné, že tvrzení platí analogicky i pro pozitivní semidefinitnost.

Druhý způsob. Využijeme cvičení 7.8, které říká, že množina vlastních čísel matice A je rovna sjednocení vlastních čísel jednotlivých bloků. Pokud jsou všechny bloky pozitivně definitní, mají kladná vlastní čísla, a tím pádem i matice A má kladná vlastní čísla. Pokud aspoň jeden blok není pozitivně definitní, pak má nějaké vlastní číslo nekladné, a tedy i matice A má aspoň jedno vlastní číslo nekladné.

Cv. 11.4 Najděte příklad matice ilustrující, že nefunguje přímočaré zobecnění na testování pozitivní semidefinitnosti pomocí rekurentního vzorečku, Sylvestrova kritéria pro pozitivní definitnost a Choleského rozkladu.

Řešení:

Uvažme matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

která je pozitivně semidefinitní, ale ne pozitivně definitní.

Rekurentní vzoreček na tuto matici aplikovat nelze, protože prvek vlevo nahoře je nulový, $a_{11} = 0$, a proto jím nelze dělit. Není ani jasné, jak by se měl rekurentní vzoreček adaptovat pro testování pozitivní semidefinitnosti.

Varianta Choleského rozkladu existuje i pro pozitivně semidefinitní matice, to znamená, že je umíme přepsat do tvaru LL^T , kde L je dolní trojúhelníková matice. Narozdíl od Choleského rozkladu nyní matice L může mít na diagonále nulové prvky a navíc rozklad není jednoznačný. Například matice A má různé rozklady:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.6 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0.6 \\ 0 & 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sin \varphi \\ 0 & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Uvažme nyní matici

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

která není pozitivně semidefinitní. Sylvestrovo kritérium pro pozitivní definitnost říká, že všechny hlavní vedoucí podmatice mají mít kladný determinant. To zde není splněno, ale všechny hlavní vedoucí podmatice mají nezáporný determinant. Náznorně tak vidíme, že pro testování pozitivní semidefinitnosti nestačí probírat pouze hlavní vedoucí podmatice, ale musíme spočítat determinanty všech hlavních podmatic (pro matici B už všechny nezáporné nejsou).

Positivně semidefinitní matice

Cv. 11.5 Ověřte pozitivní semidefinitnost matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

a to všemi třemi způsoby (na základě tří ekvivalentních definic).

Řešení:

Nejprve ukážeme, že platí základní definice, tedy že $x^T A x \geq 0$ platí $\forall x \in \mathbb{R}^2$. Rozepíšeme

$$x^T A x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 \geq 0.$$

Podle druhé ekvivalentní definice je matice A pozitivně semidefinitní, pokud má nezáporná vlastní čísla. Charakteristický polynom A můžeme vyjádřit jako

$$p_A(\lambda) = (1 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2).$$

Vidíme, že vlastní čísla jsou 0 a 2, matice A je tedy pozitivně semidefinitní.

Třetí ekvivalentní charakterizace tvrdí, že existuje matice $U \in \mathbb{R}^{m \times 2}$ taková, že $A = U^T U$. Obecný postup pro faktorizaci uvidíme později, ale pro tuto jednoduchou matici není těžké rozklad uhádnout. Navíc matici U můžeme volit jako čtvercovou nebo jako matici s jedním řádkem (protože matice A má hodnotu 1). Možné rozklady jsou například

$$A = U^T U = \begin{pmatrix} \sqrt{0.5} & \sqrt{0.5} \\ \sqrt{0.5} & \sqrt{0.5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{0.5} & \sqrt{0.5} \\ \sqrt{0.5} & \sqrt{0.5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cv. 11.6 Necht' $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jsou pozitivně definitní.

- Ukažte, že $A + B$ jsou také pozitivně definitní.
- Jak to bude se součtem pozitivně semidefinitních matic?
- Jak to bude se součtem pozitivně semidefinitní a pozitivně definitní matice?
- Jak to bude s násobkem pozitivně definitních matic?

Řešení:

- Protože matice A, B jsou pozitivně definitní, platí pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ nerovnost $x^T A x \geq 0$ a $x^T B x \geq 0$. Rovnost $x^T A x = 0$ a $x^T B x = 0$ nastane pouze pro $x = o$. Rozepišme

$$x^T (A + B) x = x^T A x + x^T B x \geq 0.$$

Rovnost $x^T (A + B) x = 0$ nastane pouze, pokud jsou oba sčítance $x^T A x$, $x^T B x$ nulové. Tato situace ale nastane pouze pro $x = o$.

- Vidíme, že v první části důkazu předchozí podúlohy jsme si vystačili pouze s pozitivní semidefinitností A a B . Platí tedy, že pozitivní semidefinitnost dvojice matic implikuje pozitivní semidefinitnost jejich součtu.
- Z předchozích podúloh již víme, že součet bude pozitivně semidefinitní. Aby byl pozitivně definitní, musí se nabýt $x^T (A + B) x = 0$ pouze pro $x = o$. Protože $x^T A x \geq 0$ a $x^T B x \geq 0$, tak rovnost $x^T (A + B) x = 0$ nastává pouze, pokud $x^T A x = 0$ a zároveň $x^T B x = 0$. Protože B je pozitivně definitní, tato situace nastane pouze pro $x = o$. Součet pozitivně semidefinitní a pozitivně definitní matice je tedy pozitivně definitní.
- Využijeme toho, že $x^T (\alpha A) x = \alpha x^T A x$, a dále také, že platí $x^T A x > 0$ pro všechna $x \neq o$. Matice αA tedy bude pozitivně definitní pro všechna $\alpha > 0$. Pro $\alpha = 0$ se vynuluje, a bude tedy pouze pozitivně semidefinitní. Pro $\alpha < 0$ už nebude ani pozitivně semidefinitní.

Cv. 11.7 Najděte regulární matici, která je pozitivně semidefinitní, ale ne pozitivně definitní.

Řešení:

Positivně semidefinitní matice A musí mít nezáporná vlastní čísla. Pokud navíc víme, že je regulární, tak musí mít nenulová vlastní čísla. Tím pádem vlastní čísla jsou kladná a matice je nutně pozitivně definitní. Hledaná matice proto neexistuje.

Cv. 11.8 Ukažte, že libovolná mocnina pozitivně semidefinitní matice je pozitivně semidefinitní matice.

Řešení:

Protože matice A je pozitivně semidefinitní, má nezáporná vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Matice A^k má vlastní čísla jejich k -té mocniny $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$, které jsou taky nezáporné. Tudíž A^k je pozitivně semidefinitní.

Cv. 11.9 Nad symetrickými maticemi z $\mathbb{R}^{n \times n}$ definujme relaci $\preceq$ předpisem $A \preceq B$ pokud $B - A$ je pozitivně semidefinitní. Ukažte, že $\preceq$ je relace částečného uspořádání.

Řešení:

Ukážeme postupně, že $\preceq$ splňuje reflexivitu, antisymetrii a tranzitivitu.

Reflexivita. Pro každou matici A je $A \preceq A$ ekvivalentní tomu, že $A - A = 0_n$ je pozitivně semidefinitní. Pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ je $x^T 0_n x = 0$, tedy 0_n je pozitivně semidefinitní, a tím pádem $\preceq$ je reflexivní relace.

Symetrie. Pokud $A \preceq B$ a zároveň $B \preceq A$, potom obě matice $B - A$ i $A - B$ jsou pozitivně semidefinitní. Pokud má matice $A - B$ kladné vlastní číslo λ , potom má matice $B - A$ vlastní číslo $-\lambda < 0$, a tudíž není pozitivně semidefinitní. Proto má matice $A - B$ pouze nulová vlastní čísla. Tím pádem je matice $A - B$ nulová (nahlédneme ze spektrálního rozkladu symetrické matice $A - B = Q\Lambda Q^T = Q0Q^T = 0$). Proto $A = B$ a relace $\preceq$ je tedy antisymetrická.

Tranzitivita. Mějme matice A, B, C takové, že $A \preceq B$ a $B \preceq C$. Tedy $M = B - A$ a $N = C - B$ jsou pozitivně semidefinitní matice. Všimněme si, že $M + N = (B - A) + (C - B) = C - A$. Protože $M + N$ je součet pozitivně semidefinitních matic, platí ze cvičení 11.6, že je opět pozitivně semidefinitní, a tudíž $A \preceq C$.

Cv. 11.10 Buď A pozitivně semidefinitní. Ukažte, že pokud $x^T A x = 0$ platí pro nějaké $x \neq 0$, potom $Ax = 0$.

Řešení:

Matice A má (symetrickou) pozitivně semidefinitní odmocninu B , tj. $A = B^2$. Můžeme tedy psát $x^T A x = x^T B^T B x = y^T y$ pro $Bx = y$. Z předpokladu je $y^T y = 0$, z čehož $y = 0$ a tedy $Bx = 0$. Pokud obě strany vynásobíme maticí B , dostaneme $Ax = B^2 x = 0$.