1. Skalární součin, norma

Standardní a nestandardní skalární součin

Cv. 1.1 Při použití standardního skalárního součinu v $\mathbb{R}^4$ spočítejte pro vektory $x = (1,1,1,1)^T$ a $y = (1,2,4,2)^T$:

(a) skalární součin $\langle x, y\rangle$,

(b) normy $\|x\|$, $\|y\|$,

(c) vzdálenost x od y.

Řešení:

(a) Podle definice standardního skalárního součinu je

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle = x^T y = \sum_{i=1}^{4} x_i y_i = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 = \\ = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 = 9.\end{aligned}$$

(b) Podle definice eukleidovské normy

$$\begin{aligned}\|x\| &= \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x^T x} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = 2,\\ \|y\| &= \sqrt{\langle y, y\rangle} = \sqrt{y^T y} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2 + 2^2} = 5.\end{aligned}$$

(c) Vzdálenost mezi vektory (body) x, y je definovaná jako norma jejich rozdílu, tedy

$$\|x - y\| = \|(0, -1, -3, -1)^T\| = \sqrt{0^2 + (-11)^2 + (-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}.$$

Cv. 1.2 Při použití standardního skalárního součinu v $\mathbb{C}^3$ spočítejte pro vektory $x = (1, 3i, 1+5i)^T$ a $y = (1-i, 1, 1)^T$:

(a) skalární součin $\langle x, y\rangle$,

(b) normy $\|x\|$, $\|y\|$,

(c) vzdálenost x od y.

Řešení:

(a) Podle definice standardního skalárního součinu je

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle = x^T \overline{y} = \sum_{i=1}^{3} x_i \overline{y}_i = x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 + x_3\overline{y}_3 = \\ = 1 \cdot (1+i) + 3i \cdot 1 + (1+5i) \cdot 1 = 2 + 9i.\end{aligned}$$

(b) Podle definice eukleidovské normy

$$\begin{aligned}\|x\| &= \sqrt{\langle x, \overline{x}\rangle} = \sqrt{x^T \overline{x}} = \sqrt{1 + 3i(-3i) + (1+5i)(1-5i)} = 6,\\ \|y\| &= \sqrt{\langle y, \overline{y}\rangle} = \sqrt{y^T \overline{y}} = \sqrt{(1-i)(1+i) + 1 + 1} = 2.\end{aligned}$$

(c) Vzdálenost mezi vektory (body) x, y je definovaná jako norma jejich rozdílu, tedy

$$\|x - y\| = \|(i, -1 + 3i, 5i)^T\| = 6.$$

Cv. 1.3 Jak vypadá množina všech vektorů, které jsou kolmé na vektor $y = (1, 5, 2)^T$? Dokážete závěr zobecnit?

Řešení:

Vektor $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ je kolmý na vektor y, pokud $0 = \langle x, y\rangle = x_1 + 5x_2 + 2x_3$. Množina hledaných vektorů je tedy popsána rovnicí $x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0$ a geometricky tvoří rovinu v prostoru $\mathbb{R}^3$. Báze je tvořena například vektory $(5, -1, 0)^T$, $(2, 0, -1)^T$.

Pokud úvahu zobecníme, tak množina vektorů kolmých na daný vektor $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{o\}$ je charakterizována jednou rovnicí. Geometricky tato množina představuje nadrovinu v prostoru $\mathbb{R}^n$, tedy je podprostor dimenze $n - 1$.

Cv. 1.4 Rozhodněte, zda následující zobrazení představují skalární součin na prostoru $\mathbb{R}^2$:

(a) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$,

(b) $\langle x, y\rangle = -x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$,

(c) $\langle x, y\rangle = x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$,

(d) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2$.

Řešení:

(a) Ne, protože není splněna symetrie. Například pro $x = (1, 0)^T$, $y = (0, 1)^T$ je

$$\langle x, y\rangle = 2 \neq -2 = \langle y, x\rangle,$$

(b) Ne, protože není splněna první vlastnost z definice skalárního součinu. Například pro $x = (1, 0)^T$ je $\langle x, x\rangle = -1$, což není kladná hodnota.

(c) Ne, protože není splněna první vlastnost z definice skalárního součinu. Například pro $x = (1, 0)^T$ je $\langle x, x\rangle = 0$ což není kladná hodnota.

(d) Ano. Musíme ověřit vlastnosti skalárního součinu:

- První vlastnost z definice. Upravme

$$\begin{aligned}\langle x, x\rangle &= x_1x_1 + 2x_1x_2 + 2x_2x_1 + 5x_2x_2\\ &= x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 = (x_1 + 2x_2)^2 + x_2^2 \geq 0.\end{aligned}$$

  Hodnota je nulová pouze tehdy, když jsou oba sčítance nulové, tedy když

$$x_1 + 2x_2 = 0 \ \text{ a zároveň } \ x_2 = 0.$$

  To nastane pouze pro $x = (0, 0)^T$, čímž je první vlastnost dokázána.

- Vlastnost se součtem $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ platí, protože

$$\begin{aligned}\langle x + y, z\rangle &= (x_1 + y_1)z_1 + 2(x_1 + y_1)z_2 + 2(x_2 + y_2)z_1 + 5(x_2 + y_2)z_2,\\ \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle &= (x_1z_1 + 2x_1z_2 + 2x_2z_1 + 5x_2z_2)\\ &\quad + (y_1z_1 + 2y_1z_2 + 2y_2z_1 + 5y_2z_2).\end{aligned}$$

- Vlastnost s násobky $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle y, x\rangle$ platí, protože

$$\begin{aligned}\langle \alpha x, y\rangle &= \alpha x_1y_1 + 2\alpha x_1y_2 + 2\alpha x_2y_1 + 5\alpha x_2y_2,\\ \alpha\langle x, y\rangle &= \alpha(x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2).\end{aligned}$$

- Symetrie: $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ platí, protože

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2,\\ \langle y, x\rangle &= y_1x_1 + 2y_1x_2 + 2y_2x_1 + 5y_2x_2.\end{aligned}$$

Norma indukovaná skalárním součinem

Cv. 1.5 Pythagorova věta.

(a) Nad $\mathbb{R}$ dokažte: $x \perp y$ platí právě tehdy, když $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

(b) Najděte protipříklad nad $\mathbb{C}$, kdy předchozí ekvivalence neplatí, tj. x, y nejsou kolmé a přesto $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Řešení:

(a) Upravíme výraz

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle =\\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle.\end{aligned}$$

Tudíž rovnost $\|x+y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2$ nastane právě tehdy, když $2\langle x, y\rangle = 0$, neboli když $x \perp y$.

(b) Protipříklad nad $\mathbb{C}$: Uvažujme například vektory $x = (1, 0)^T$, $y = (i, 0)^T$. Nejsou na sebe kolmé, ale

$$\|x + y\|^2 = 2 = 1 + 1 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Cv. 1.6 Připomeňme, že stopa matice je definována jako součet prvků na diagonále:

$$\operatorname{trace}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

(a) Ukažte, že $\langle A, B\rangle = \operatorname{trace}(A^TB)$ definuje skalární součin na prostoru $\mathbb{R}^{m\times n}$.

(b) Pro tento skalární součin zformulujete Cauchyho–Schwarzovu nerovnost.

(c) Dokažte $\operatorname{trace}(A)^2 \leq n \cdot \operatorname{trace}(A^TA)$.

Řešení:

(a) Pišme

$$\operatorname{trace}(A^TB) = \sum_{i=1}^{n}(A^TB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(A^T)_{ij}B_{ji}. = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ji}b_{ji}.$$

Čili výraz $\operatorname{trace}(A^TB)$ představuje standardní skalární součin, pokud matici A asociujeme s dlouhým vektorem, složeným z jejích prvků

$$(a_{11}, \dots, a_{m1}, a_{22}, \dots, a_{m2}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{mn}).$$