

2. Ortonormální systém a Gramova–Schmidtova ortogonalizace

Cv. 2.1 Určete koeficienty lineární kombinace vektoru $(3, 2, 1)^T$ vůči ortonormální bázi $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)^T$, $(0, 0, 1)^T$.

Řešení:

Standardní způsob výpočtu koeficientů lineární kombinace (tedy souřadnic) vede na řešení soustavy lineárních rovnic

$$\alpha_1 \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T + \alpha_2 \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)^T + \alpha_3(0, 0, 1)^T = (3, 2, 1)^T,$$

čili na

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 3 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Protože se jedná o ortonormální bázi, můžeme využít toho, že lze koeficienty vyjádřit snadněji pomocí tzv. *Fourierových* koeficientů jako $x = \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle u_i$, kde u_1, \dots, u_n je ortonormální báze.

Aplikací vzorce dostáváme

- $\alpha_1 = \langle (3, 2, 1)^T, \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T \rangle = \frac{5}{\sqrt{2}},$
- $\alpha_2 = \langle (3, 2, 1)^T, \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)^T \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}},$
- $\alpha_3 = \langle (3, 2, 1)^T, (0, 0, 1)^T \rangle = 1.$

Cv. 2.2 V prostoru \mathbb{R}^4 se standardním skalárním součinem nalezněte pomocí Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace ortonormální bázi $B = \{z_1, \dots, z_r\}$ řádkového prostoru matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Aplikujeme Gramovu–Schmidtovu ortogonalizaci na řádky matice A , tedy na vektory $x_1 = (1, 1, 1, 1)^T$, $x_2 = (4, 1, 4, 1)^T$, $x_3 = (1, 2, 3, 4)^T$.

Algoritmus Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace pracuje iterativně, kdy v každé iteraci nakolmí vektor na množinu již zortonormalizovaných vektorů. Konkrétně, v i -té iteraci nejprve odečte od vektoru x_i jeho kolmou projekci do prostoru $\text{span}\{z_1, \dots, z_{i-1}\}$ již dříve ortonormalizovaných vektorů a dostaneme vektor $y_i = x_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle x_i, z_j \rangle z_j$. Následně tento vektor normalizuje: $z_i = \frac{y_i}{\|y_i\|}$.

Jednotlivé kroky Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace jsou:

- normalizujeme $y_1 = x_1$: $\|y_1\| = \sqrt{4} = 2$ a odtud $z_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$.
- $\langle x_2, z_1 \rangle = 5$ a proto $y_2 = (4, 1, 4, 1)^T - 5(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T = (\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2})^T$.

- normalizujeme y_2 : $\|y_2\| = 3$ a dostaneme $z_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T$.
- $\langle x_3, z_1 \rangle = 5$, $\langle x_3, z_2 \rangle = -1$ a tedy

$$y_3 = (1, 2, 3, 4)^T - 5(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T + 1(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T = (-1, -1, 1, 1)^T.$$

- normalizujeme y_3 : $\|y_3\| = 2$ a máme $z_3 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$.

Řešením je ortonormální báze $B = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T, (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T, (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T\}$.

Poznámka. Čtenář může dále ověřit, že vektory z_1, z_2, z_3 jsou skutečně na sebe navzájem kolmé a mají jednotkovou velikost. To poslouží i jako dílčí (a obvykle postačující) zkouška správnosti výsledku. Kdybychom chtěli mít skutečnou jistotu, že výsledek je správně, museli bychom ještě ukázat, že vektory z_1, z_2, z_3 generují prostor $\mathcal{R}(A)$. To lze prokázat například ověřením rovnosti z věty o Fourierových koeficientech, tedy rovnosti $x_k = \sum_{i=1}^3 \langle x_k, z_i \rangle z_i$ pro $k = 1, 2, 3$.

Cv. 2.3 Rozšiřte ortonormální bázi z předchozího příkladu na ortonormální bázi \mathbb{R}^4 .

Řešení:

Abychom rozšířili bázi řádkového prostoru matice A na bázi celého prostoru \mathbb{R}^4 , můžeme například matici nejprve převést do odstupňovaného tvaru. Tím se dozvíme pozice nebázických sloupců, pro které přidáme odpovídající kanonické vektory. Odstupňovaný tvar matice A je

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nebázický je pouze poslední sloupec, proto stačí přidat $x_4 = (0, 0, 0, 1)^T$, čímž získáme rozšíření na bázi \mathbb{R}^4 . Pokud aplikujeme Gramovu-Schmidtovu ortogonalizaci na původní řádky matice a vektor e_4 přidáme na konec, bude ortogonalizace pro první tři vektory probíhat stejně. Můžeme proto aplikovat Gramovu-Schmidtovu ortogonalizaci rovnou na vektory z_1, z_2, z_3, x_4 , čímž získáme hledané rozšíření na ortonormální bázi.

Konkrétně stačí dopočítat pouze nakolmení a normování x_4 :

- $\langle x_4, z_1 \rangle = \frac{1}{2}$, $\langle x_4, z_2 \rangle = -\frac{1}{2}$, $\langle x_4, z_3 \rangle = \frac{1}{2}$, a tudíž

$$\begin{aligned} y_4 &= (0, 0, 0, 1)^T - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T - \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T \\ &= (\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4})^T. \end{aligned}$$

- normalizujeme y_4 : $\|y_4\| = \frac{1}{2}$ a získáme $z_4 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$.

Cv. 2.4 Buď $x_1 = (1, 1, 0)^T$, $x_2 = (1, 1, 1)^T$:

- ortogonalizujte vektory v pořadí x_1, x_2 ,
- ortogonalizujte vektory v pořadí x_2, x_1 .

Řešení:

Cílem úlohy je uvědomit si, že u Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace záleží na tom, v jakém pořadí vektory ortogonalizujeme. V obou případech dostaneme správnou ortonormální bázi prostoru $\text{span}\{x_1, x_2\}$, ale pokaždé se ta báze bude skládat z různých vektorů.

- (a) Ortogonalizace v pořadí
- x_1, x_2
- vede k dvojici vektorů

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T, \quad (0, 0, 1)^T,$$

- (b) Ortogonalizace v pořadí
- x_2, x_1
- vede na dvojici vektorů

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T, \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)^T.$$

Cv. 2.5 Co se stane, když Gramova–Schmidtova ortogonalizace

- (a) dostane na vstup lineárně závislé vektory?
- (b) dostane na vstup ortogonální vektory?
- (c) dostane na vstup ortonormální vektory?
- (d) dostane na vstup $-x_i$ namísto x_i ? Jak se změní výstup?

Řešení:

- (a) Mějme na vstupu x_1, \dots, x_n a mějme j nejmenší takové, že $x_j = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i x_i$ je vektor lineárně závislý na x_1, \dots, x_{j-1} . Jeho projekce do podprostoru $\text{span}\{x_1, \dots, x_{j-1}\}$ je tedy vektor x_j sám. Gramova–Schmidtova ortogonalizace bude probíhat normálně až do okamžiku, kdy dojde k odečtení kolmé projekce vektoru x_j do podprostoru $\text{span}\{x_1, \dots, x_{j-1}\}$. V tu chvíli se vektor vynuluje. Při jeho následném normování se program zastaví, protože budeme chtít dělit 0.
- (b) Při odčítání kolmé projekce na již zortonormalizované vektory se vektor nemění, neboť všechny projekce budou nulové vektory. Jediné, k čemu dojde, bude normalizace vektorů, které jsme dostali na vstupu.
- (c) V tomto případě ani odčítání projekcí (nulových vektorů), ani normování (dělení 1) nemění vstupní vektory. Proto na výstupu dostaneme stejné vektory jako na vstupu.
- (d) Ortogonalizace poběží pro vstup $x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n$ stejně jako pro $x_1, \dots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \dots, x_n$ až do okamžiku, kdy přejdeme k ortogonalizaci i -tého vektoru. Označme jako p kolmou projekci i -tého vektoru do podprostoru $\text{span}\{x_1, \dots, x_{i-1}\}$. Vektor p bude mít pro x_i a $-x_i$ opačné znaménko, tedy i po odečtení projekce dostáváme vektory $x_i - p$ a $-x_i - (-p) = -x_i + p = -(x_i - p)$ s opačnými znaménky. Normování nám tento vztah zachová.

Pro ostatní vektory už k žádné změně nedojde. Odčítáme totiž kolmou projekci do podprostoru, která nezávisí na zvolené bázi tohoto podprostoru. Výstupy obou ortogonalizací budou stejné až na znaménko i -tého vektoru.

Cv. 2.6 V prostoru \mathbb{C}^3 ortogonalizujte $x_1 = (i, i, i)^T$, $x_2 = (0, i, i)^T$, $x_3 = (0, 0, i)^T$.

Řešení:

Pokud bychom nebyli omezeni na provedení Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace, mohli bychom odečíst druhý vektor od prvního a třetí vektor od druhého. Dostali bychom vektory $(i, 0, 0)^T$, $(0, i, 0)^T$, $(0, 0, i)^T$. Ty zřejmě generují stejný prostor jako původní vektory a zároveň mají všechny normu rovnu 1.

Postupujme nyní pomocí Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace. Nejprve znormujme vektor $x_1 = (i, i, i)^T$. Norma vektoru je

$$\|x_1\| = \sqrt{\langle x_1, x_1 \rangle} = \sqrt{x_1^T x_1} = \sqrt{3(i \cdot (-i))} = \sqrt{-3i^2} = \sqrt{3}.$$

Proto $z_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(i, i, i)^T$. Dále

$$\begin{aligned} y_2 &= (0, i, i)^T - \langle x_2, z_1 \rangle \frac{1}{\sqrt{3}}(i, i, i)^T = (0, i, i)^T - \frac{-2i^2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}}(0, i, i)^T \\ &= (0, i, i)^T - \frac{2}{3}(i, i, i)^T = \frac{1}{3}(-2i, i, i)^T. \end{aligned}$$

Normováním dostáváme

$$z_2 = \frac{1}{\|y_2\|} \frac{1}{3}(-2i, i, i)^T = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \frac{1}{3}(-2i, i, i)^T = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2i, i, i)^T.$$

Nakonec

$$y_3 = (0, 0, i)^T - \frac{1}{3}(i, i, i)^T - \frac{1}{6}(-2i, i, i)^T = \frac{1}{2}(0, -i, i)^T,$$

a tedy $z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -i, i)^T$.

Cv. 2.7 Najděte ortonormální bázi podprostoru \mathbb{R}^3 popsaného rovnicí $x - y + z = 0$.

Řešení:

Množina řešení soustavy má tvar $\{(a - b, a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$. Jedna z možných bází je proto $(0, 1, 1)^T$, $(1, 1, 0)^T$. Po znormalizování prvního vektoru dostaneme

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)^T.$$

Po odečtení projekce od vektoru $(1, 1, 0)^T$ dostáváme

$$\begin{aligned} y_2 &= (1, 1, 0)^T - \langle (1, 1, 0)^T, \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)^T \rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (0, 1, 1)^T \\ &= (1, 1, 0)^T - \frac{1}{2}(0, 1, 1)^T = (1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T. \end{aligned}$$

Nyní stačí normalizovat vektor $y_2 = (1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T$. Ten má normu $\sqrt{3/2}$. Tedy druhý vektor ortonormální báze je

$$z_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot (1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, -1)^T.$$

Poznamenejme, že řešení úlohy se může lišit v závislosti na volbě báze.

Cv. 2.8 Pro skalární součin $\langle x, y \rangle := 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$ zortogonalizujte vektory $x_1 = (1, 0)^T$, $x_2 = (1, 1)^T$.

Řešení:

Důležité je uvědomit si, že postup Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace se nijak nemění. Lišit se bude pouze výpočet skalárního součinu $\langle x, y \rangle$ a normy $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

V prvním kroku normalizujeme vektor $(1, 0)^T$. Platí, že

$$\|(1, 0)^T\| = \sqrt{2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2} = \sqrt{2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0^2} = \sqrt{2},$$

proto $z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0)^T$. Dále

$$\langle x_2, z_1 \rangle = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \cdot 1 \cdot 0 = \frac{3}{\sqrt{2}},$$

z čehož

$$y_2 = (1, 1)^T - \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0)^T = \left(-\frac{1}{2}, 1\right)^T.$$

Protože

$$\left\| \left(-\frac{1}{2}, 1\right)^T \right\| = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1 + 1 \cdot 1^2} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

má druhý vektor ortonormální báze hodnotu $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{1} \left(-\frac{1}{2}, 1\right)^T = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 2)^T$.

Můžeme opět provést (dílčí) zkoušku a ověřit, že výsledné vektory z_1, z_2 jsou na sebe kolmé v příslušném skalárním součinu, tedy $\langle z_1, z_2 \rangle = 0$.