

9. Vlastní čísla – Jordanova normální forma a symetrické matice

Jordanova normální forma

Cv. 9.1 Najděte

- (a) matici řádu 3 s jediným vlastním vektorem (libovolným),
- (b) matici řádu 3 s jediným vlastním vektorem $v = (1, 1, 1)^T$.

Řešení:

- (a) Matice musí mít Jordanovu normální formu ve tvaru jediné Jordanovy buňky velikosti 3. Můžeme tedy volit přímo Jordanovu buňku

$$J_3(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

kde λ je libovolné číslo.

- (b) Vyjdeme z předchozího příkladu a zvolíme například matici

$$J_3(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vlastní vektor této matice je jediný, ale je to vektor $e_1 = (1, 0, 0)^T$. Pokud chceme změnit vlastní vektor, ale zachovat vlastní čísla a jejich algebraické a geometrické násobnosti, můžeme využít podobnosti a uvažovat matici ve tvaru $A = S^{-1}J_3(0)S$. Aby byl vektor v vlastním vektorem a číslo λ vlastním číslem matice A , musí platit $Av = \lambda v$, čili $S^{-1}J_3(0)Sv = \lambda v$. Přenásobením maticí S zleva dostaneme $J_3(0)Sv = \lambda Sv$. Tudíž vektor Sv je vlastním vektorem matice $J_3(0)$, což znamená $Sv = e_1$. Hledáme tedy regulární matici S takovou, aby platilo

$$S \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Takovým matic existuje mnoho, zvolíme například

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hledaná matice potom je

$$\begin{aligned} A &= S^{-1}J_3(0)S \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Můžeme pak ověřit, že tato matice splňuje zadání: Matice A má jediné vlastní číslo 0, které je trojnásobné a přísluší mu jediný vlastní vektor v .

Cv. 9.2 V kolika Jordanových buňkách matice $A \in \mathbb{R}^{16 \times 16}$ je vlastní číslo 8, pokud víme, že $\text{rank}(A - 8I_{16}) = 9$?

Řešení:

Počet všech Jordanových buněk odpovídajících vlastnímu číslu λ je roven počtu vlastních vektorů pro λ , tedy hodnotě $n - \text{rank}(A - \lambda I_n)$. V našem případě $n - \text{rank}(A - 8I_n) = 16 - 9 = 7$. Tedy vlastní číslo 8 je v sedmi Jordanových buňkách.

Cv. 9.3 Najděte Jordanovu normální formu matic

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Matice A je trojúhelníková, její vlastní čísla jsou tedy prvky na diagonále. Konkrétně matice A má vlastní číslo $\lambda_1 = 1$ (dvojnásobné) a $\lambda_1 = 2$ (jednonásobné). Vlastní číslo λ_2 leží v jedné Jordanově buňce velikosti 1, ale λ_1 může ležet v jedné nebo dvou Jordanových buňkách. Spočítáme proto $\text{rank}(A - \lambda_1 I_3) = 1$, což říká, že geometrická násobnost λ_1 je dva, čili přísluší mu dva vlastní vektory. Hledaná Jordanova normální forma je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matice B má také dvojnásobné vlastní číslo $\lambda_1 = 1$ a jednonásobné vlastní číslo $\lambda_2 = 2$. Protože $\text{rank}(B - \lambda_1 I_3) = 2$, přísluší k vlastnímu číslu λ_1 pouze jeden vlastní vektor a tudíž λ_1 leží v Jordanově buňce velikosti 2. Jordanova normální forma matice B je

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matice C má dvojnásobné vlastní číslo $\lambda_1 = 1$ a dvojnásobné vlastní číslo $\lambda_2 = 3$. Protože $\text{rank}(C - \lambda_1 I_4) = 2$ a $\text{rank}(C - \lambda_2 I_4) = 3$, vlastní číslo λ_1 leží ve dvou buňkách, kdežto λ_2 leží v jedné buňce. Jordanova normální forma matice C je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$