

11. Positivně (semi-)definitní matice

Positivně definitní matice

Cv. 11.1 Otestujte pozitivní definitnost matic

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

pomocí:

- (a) rekurentního vzorce,
- (b) Sylvestrova pravidla,
- (c) Gaussovy eliminace.

Cv. 11.2 Otestujte pozitivní semidefinitnost resp. pozitivní definitnost následujících matic pomocí vlastních čísel:

- (a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,
- (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,
- (c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Cv. 11.3 Buď A blokově diagonální symetrická matice. Ukažte, že A je pozitivně definitní právě tehdy, když všechny bloky jsou pozitivně definitní.

Jak to bude s pozitivní semidefinitností?

Cv. 11.4 Najděte příklad matice ilustrující, že nefunguje přímočaré zobecnění na testování pozitivní semidefinitnosti pomocí rekurentního vzorečku, Sylvestrova kritéria pro pozitivní definitnost a Choleského rozkladu.

Positivně semidefinitní matice

Cv. 11.5 Ověřte pozitivní semidefinitnost matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

a to všemi třemi způsoby (na základě tří ekvivalentních definic).

Cv. 11.6 Nechtě $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jsou pozitivně definitní.

- (a) Ukažte, že $A + B$ jsou také pozitivně definitní.
- (b) Jak to bude se součtem pozitivně semidefinitních matic?
- (c) Jak to bude se součtem pozitivně semidefinitní a pozitivně definitní matice?

(d) Jak to bude s násobkem pozitivně definitních matic?

- Cv. 11.7** Najděte regulární matici, která je pozitivně semidefinitní, ale ne pozitivně definitní.
- Cv. 11.8** Ukažte, že libovolná mocnina pozitivně semidefinitní matice je pozitivně semidefinitní matice.
- Cv. 11.9** Nad symetrickými maticemi z $\mathbb{R}^{n \times n}$ definujme relaci $\preceq$ předpisem $A \preceq B$ pokud $B - A$ je pozitivně semidefinitní. Ukažte, že $\preceq$ je relace částečného uspořádání.
- Cv. 11.10** Buď A pozitivně semidefinitní. Ukažte, že pokud $x^T A x = 0$ platí pro nějaké $x \neq o$, potom $Ax = o$.