

13. Bilineární a kvadratické formy

Cv. 13.1 Jsou následující zobrazení bilineární formou? Pokud ano, jde o symetrickou formu?

- (a) $a: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definované $a(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1$,
- (b) $b: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definované $b(x, y) = x_1y_2 + x_2$,
- (c) $c: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definované $c(x, y) = x_1^2 + y_1^2 + 2x_2y_1$,
- (d) $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definované $d(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + 2x_2y_2$,
- (e) $e: \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ definované $e(A, B) = AB$.

Cv. 13.2 Najděte matici bilineárních forem vzhledem ke kanonické bázi.

- (a) $b(x, y) = x_1y_1 - x_1y_2 + 3x_2y_1 + 2x_2y_2 - 2x_3y_2$
- (b) $b(x, y) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + 5x_2y_3 + 5x_3y_2$

Cv. 13.3 Pro následující kvadratickou formu

$$f(x) = 3x_1^2 + 5x_1x_2 + 5x_2^2$$

nalezněte symetrickou bilineární formu $b(x, y)$, která ji indukuje a uveďte $b(x, y)$ v maticové reprezentaci.

Cv. 13.4 Najděte matici kvadratické formy

$$f(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_3^2$$

vzhledem ke kanonické bázi a vzhledem k bázi $B = \{(1, 1, 1)^T, (1, 1, 0)^T, (1, 0, 0)^T\}$. Použijte dva různé postupy: z definice a pomocí matice přechodu.

Cv. 13.5 Pro zobrazení $b: \mathcal{P}^2 \times \mathcal{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definované $b(p, q) = p(0)q(2)$ ukažte:

- (a) b je bilineární forma,
- (b) najděte matici formy vzhledem k bázi $B = \{1, 1+x, (1-x)^2\}$,
- (c) vyčíslete $b(1-x, x^2-2x+2)$ dvěma různými postupy,
- (d) najděte matici formy vzhledem k bázi $B' = \{1, x, x^2\}$ s využitím té staré.

Cv. 13.6 Jednoznačnost kvadratické formy.

- (a) Nechť $A, B \in \mathbb{T}^{n \times n}$ jsou symetrické a nechť $x^T Ax = x^T Bx$ platí pro všechna $x \in \mathbb{T}^n$. Rozhodněte, zda potom $A = B$.
- (b) Rozhodněte, zda matice kvadratické formy vzhledem k dané bázi je jednoznačná.

Cv. 13.7 Buď V vektorový prostor dimenze n nad tělesem $\mathbb{T}$ a nechť charakteristika tělesa $\mathbb{T}$ není 2.

- (a) Ukažte, že bilineární formy a symetrické bilineární formy na prostoru V tvoří vektorové prostory a určete jejich dimenze.
- (b) Ukažte, že kvadratické formy na prostoru V tvoří vektorový prostor a určete jeho dimenzi.