

14. Kvadratické formy a Sylvestrův zákon setrvačnosti

Cv. 14.1 Diagonalizujte kvadratické formy s maticemi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cv. 14.2 Diagonalizujte kvadratické formy s maticemi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a určete polární bázi, tj. bázi, vůči níž je matice formy diagonální.

Cv. 14.3 Uvažte relaci kongruence, kdy $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jsou v relaci, pokud existuje regulární S taková, že $B = S^T A S$.

- (a) Dokažte, že se jedná o relaci ekvivalence.
- (b) Kolik má tříd ekvivalencí?

Cv. 14.4 Vyjádřete kvadratickou formu $f(x) = x^T A x$ jako součet čtverců lineárních forem, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cv. 14.5 Ukažte, že rovnice $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 1$ popisuje elipsu v $\mathbb{R}^2$ a zjistěte její charakteristiky (postupem z přednášky).