

7. Vlastní čísla – základy

Cv. 7.1 Vlastní vektor matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ reprezentuje směr, který se při lineárním zobrazení $f(x) = Ax$ zobrazí opět na ten samý směr (mění se tedy pouze velikost nebo orientace vektoru). Pro vlastní vektor v matice A tedy platí, že přímka $\text{span}\{v\}$ se při zobrazení f zobrazí do sebe sama. Příslušné vlastní číslo matice pak představuje škálování v tomto invariantním směru.

Následující matice reprezentují geometrická zobrazení v rovině. Nalezněte jejich vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory a pokuste se je geometricky vysvětlit:

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$(b) \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(c) \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$(d) \quad D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cv. 7.2 Určete charakteristický polynom a nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory následujících matic nad tělesem $\mathbb{C}$. Jsou vlastní vektory jednoznačné?

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix},$$

$$(b) \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$(c) \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Cv. 7.3 Určete charakteristický polynom a nalezněte vlastní čísla matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Cv. 7.4 Známe tři vlastní čísla matice

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 & -7 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \\ 16 & 4 & 15 & -8 \\ 30 & 4 & 26 & -19 \end{pmatrix},$$

a to $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -4$ a $\lambda_3 = 5$. Dopočítejte zbylé vlastní číslo.

Cv. 7.5 Matice A má vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ a jim odpovídající vlastní vektory $x_1, \dots, x_n$. Určete, jak vypadají vlastní čísla a vlastní vektory:

- (a) matice A^2 ,
- (b) matice αA ,
- (c) matice $A + \alpha I_n$,
- (d) matice A^T .

Cv. 7.6 Ukažte, že jeden vlastní vektor matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nemůže příslušet různým vlastním číslům.

Cv. 7.7 Najděte nejmenší číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, že $A + \beta I_n$ je regulární pro všechny $\beta > \alpha$.

Cv. 7.8 Známe-li vlastní čísla a vektory matic $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$, jak je spočítat pro matici

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}?$$

Cv. 7.9 Buď $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matice projekce. Jaká má vlastní čísla a vlastní vektory?

Cv. 7.10 Buď $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

- (a) Ověřte Cayleyho-Hamiltonovu větu,
- (b) Vyjádřete A^4 jako lineární kombinaci I_2 a A ,
- (c) Vyjádřete A^{-1} jako lineární kombinace I_2 a A .