

9. Vlastní čísla – Jordanova normální forma a symetrické matice

Jordanova normální forma

Cv. 9.1 Najděte

- (a) matici řádu 3 s jediným vlastním vektorem (libovolným),
- (b) matici řádu 3 s jediným vlastním vektorem $v = (1, 1, 1)^T$.

Cv. 9.2 V kolika Jordanových buňkách matice $A \in \mathbb{R}^{16 \times 16}$ je vlastní číslo 8, pokud víme, že $\text{rank}(A - 8I_{16}) = 9$?

Cv. 9.3 Najděte Jordanovu normální formu matic

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cv. 9.4 Určete, kolik je tříd ekvivalence podobnosti pro:

- (a) matice řádu 4, které mají pouze vlastní číslo 7,
- (b) matice řádu 3 s vlastními čísly 5 a 7.

Cv. 9.5 Najděte Jordanovu normální formu matice $J_n(\lambda)^T$.

Cv. 9.6 O kolik se maximálně zmenší hodnota matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ když ji umocníme A^2 ?

Symetrické matice

Cv. 9.7 Ukažte, že spektrální rozklad $A = Q\Lambda Q^T$, kde Λ je diagonální a Q ortogonální, existuje pouze pro symetrické matice.

Cv. 9.8 Najděte spektrální rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cv. 9.9 Víme, že symetrická matice $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ má vlastní vektor $v = (1, 2)^T$. Dopačítejte druhý vlastní vektor.

Cv. 9.10 Dokažte, že pro libovolnou matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ má matice $A^T A$ všechna vlastní čísla nezáporná. Kdy budou kladná?

Cv. 9.11 (a) Dokažte z definice, že vlastní vektory odpovídající různým vlastním číslům symetrické matice jsou na sebe kolmé.
(b) S pomocí předchozího bodu dokažte větu o spektrálním rozkladu přímo pro symetrické matice s různými vlastními čísly.