

Ortogonální doplněk a projekce

Úkol 3.1. Buď V vektorový prostor. Rozhodněte, zda pro každou množinu vektorů M v prostoru V platí následující vlastnosti (dokažte z definice, nebo uveďte protipříklad):

(a) $M \cap M^\perp \subseteq \{o\},$

(b) $M \cap M^\perp \supseteq \{o\},$

(c) $(M^\perp)^\perp \subseteq M,$

(d) $(M^\perp)^\perp \supseteq M.$ [4 b]

Úkol 3.2. Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a uvažujme dvě zobrazení $f: x \mapsto Ax$, $g: y \mapsto A^T y$. Ukažte, že pro libovolný podprostor $U \subseteq \mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem platí

$$f(U) \subseteq U \implies g(U^\perp) \subseteq U^\perp.$$

[6 b]