

Positivně (semi-)definitní matice

Úkol 10.1. Pro $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definujme relace $\prec, \preceq$ předpisem $A \prec B$ (resp. $A \preceq B$) pokud $B - A$ je pozitivně definitní (resp. pozitivně semidefinitní).

- (a) Nechť $0 \prec A$. Rozhodněte, zda platí $0 \prec A^{-1}$.
- (b) Nechť $A \preceq B$. Rozhodněte, zda platí $V^T A V \preceq V^T B V$ pro $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
- (c) Nechť $0 \prec A, B$. Rozhodněte, zda platí $0 \prec AB + BA$.
- (d) Nechť $0 \preceq A \preceq B$. Rozhodněte, zda platí $A^2 \preceq B^2$. [6 b]

Úkol 10.2. Rozhodněte minimálně 2 různými způsoby, zda je následující matice $n \times n$ pozitivně definitní:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

[6 b]