Příklad 1. Rozhodněte, zda jsou následující vektory afinně nezávislé:

$$x_0 = (1,2,3), \quad x_1 = (2,2,1), \quad x_2 = (1,3,2), \quad x_3 = (2,1,3).$$

Příklad 2. Rozhodněte, zda platí $M = N$ pro afinní prostory

a) $M = (1,1) + \operatorname{span}\{(1,2)\}$, $N = (2,3) + \operatorname{span}\{(2,4)\}$,
b) $M = (1,0,0) + \operatorname{span}\{(1,2,1),(2,1,0)\}$, $N = (2,-1,-1) + \operatorname{span}\{(0,3,2),(3,0,-1)\}$.

Příklad 3. Rozhodněte, zda jsou následující zobrazení afinní:

a) $f\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ s předpisem $f(A) = 2A + B$, kde $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je pevná matice,
b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ s předpisem $f(x_1,x_2) = (x_1+1, 1)$.

Opakování: Konečná tělesa, vektorové prostory, lineární zobrazení

Příklad 4. Nechť U, V jsou vektorové podprostory v $\mathbb{Z}_5^4$ s bázemi

$$\begin{aligned} B_U &= \{(1,2,3,4)^T, (2,0,2,1)^T\}, \\ B_V &= \{(0,4,4,2)^T, (0,1,2,3)^T, (3,0,1,4)^T\}. \end{aligned}$$

Najděte bázi prostoru $U \cap V$.

Příklad 5. Najděte matici přechodu od báze B k bázi B' prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ pro

$$\begin{aligned} B &= \{(3,3,0),(2,2,4),(0,4,3)\}, \\ B' &= \{(1,0,2),(2,1,1),(3,2,4)\}. \end{aligned}$$

Příklad 6. Mějme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}^2$ a $g\colon \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}^3$ zadané následovně:

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= 2x^2 + x + 2, & g(2x^2 + x) &= (2,-1,8), \\ f(0,1,0) &= -2x + 1, & g(x^2 + x) &= (3,2,5), \\ f(0,0,1) &= 3x^2 + 3, & g(-x^2 - x + 1) &= (-1,3,-9). \end{aligned}$$

Spočítejte matici složeného zobrazení $g \circ f$ vzhledem ke kanonické bázi. Je toto zobrazení prosté a je na?

Domácí úkol č. 11: Dokažte následující tvrzení:

a) Obraz afinního podprostoru při afinním zobrazení je afinní podprostor.
b) Složením dvou afinních zobrazení dostaneme opět afinní zobrazení. [2 b]

Příklad 1. Rozhodněte, zda jsou následující vektory afinně nezávislé:

$$x_0 = (1, 2, 3), \quad x_1 = (2, 2, 1), \quad x_2 = (1, 3, 2), \quad x_3 = (2, 1, 3).$$

Příklad 2. Rozhodněte, zda platí $M = N$ pro afinní prostory

a) $M = (1, 1) + \operatorname{span}\{(1, 2)\}$, $N = (2, 3) + \operatorname{span}\{(2, 4)\}$,
b) $M = (1, 0, 0) + \operatorname{span}\{(1, 2, 1), (2, 1, 0)\}$, $N = (2, -1, -1) + \operatorname{span}\{(0, 3, 2), (3, 0, -1)\}$.

Příklad 3. Rozhodněte, zda jsou následující zobrazení afinní:

a) $f\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ s předpisem $f(A) = 2A + B$, kde $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je pevná matice,
b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ s předpisem $f(x_1, x_2) = (x_1 + 1, 1)$.

Opakování: Konečná tělesa, vektorové prostory, lineární zobrazení

Příklad 4. Nechť U, V jsou vektorové podprostory v $\mathbb{Z}_5^4$ s bázemi

$$B_U = \{(1, 2, 3, 4)^T, (2, 0, 2, 1)^T\},$$
$$B_V = \{(0, 4, 4, 2)^T, (0, 1, 2, 3)^T, (3, 0, 1, 4)^T\}.$$

Najděte bázi prostoru $U \cap V$.

Příklad 5. Najděte matici přechodu od báze B k bázi B' prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ pro

$$B = \{(3, 3, 0), (2, 2, 4), (0, 4, 3)\},$$
$$B' = \{(1, 0, 2), (2, 1, 1), (3, 2, 4)\}.$$

Příklad 6. Mějme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}^2$ a $g\colon \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}^3$ zadané následovně:

$$\begin{aligned} f(1, 0, 0) &= 2x^2 + x + 2, & g(2x^2 + x) &= (2, -1, 8), \\ f(0, 1, 0) &= -2x + 1, & g(x^2 + x) &= (3, 2, 5), \\ f(0, 0, 1) &= 3x^2 + 3, & g(-x^2 - x + 1) &= (-1, 3, -9). \end{aligned}$$

Spočítejte matici složeného zobrazení $g \circ f$ vzhledem ke kanonické bázi. Je toto zobrazení prosté a je na?

Domácí úkol č. 11: Dokažte následující tvrzení:

a) Obraz afinního podprostoru při afinním zobrazení je afinní podprostor.
b) Složením dvou afinních zobrazení dostaneme opět afinní zobrazení. [2 b]