Příklad 1. Vyřešte lineární soustavu s parametrem $a \in \mathbb{R}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right)$$

Příklad 2. Vyřešte Gauss–Jordanovou eliminací následující soustavy lineárních rovnic:

$$\text{a)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 7 \end{array}\right) \qquad \text{b)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Příklad 3. Spočítejte $A+B$, $2 \cdot A$, $B \cdot C$, $C \cdot B$ a C^T pro matice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 8 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -2 \\ 6 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Příklad 4. Dokažte následující vlastnosti pro $\alpha \in \mathbb{R}$ a A, B, C matice vhodných rozměrů:

a) $(A+B)^T = A^T + B^T$
b) $A \cdot I_n = A$
c) $e_i^T A = A_{i*}$
d) $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$
e) $(AB)^T = B^T A^T$
f) $A(B+C) = AB + AC$
g) matice $A^T A$ je symetrická

Příklad 5. Spočítejte $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{2017}$.

Domácí úkol č. 1: Stopu matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definujeme jako hodnotu $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^n A_{ii}$. Rozhodněte, zda pro matice $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ platí následující vlastnosti (dokažte nebo uveďte protipříklad):

a) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$,
b) $\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(CAB)$,
c) $\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(ACB)$,
d) $\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(ACB)$ pro A, B, C symetrické. [4 × 0.5 b]

Příklad 1. Vyřešte lineární soustavu s parametrem $a \in \mathbb{R}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right)$$

Příklad 2. Vyřešte Gauss–Jordanovou eliminací následující soustavy lineárních rovnic:

$$\text{a)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 7 \end{array}\right) \qquad \text{b)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Příklad 3. Spočítejte $A+B$, $2 \cdot A$, $B \cdot C$, $C \cdot B$ a C^T pro matice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 8 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -2 \\ 6 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Příklad 4. Dokažte následující vlastnosti pro $\alpha \in \mathbb{R}$ a A, B, C matice vhodných rozměrů:

a) $(A+B)^T = A^T + B^T$
b) $A \cdot I_n = A$
c) $e_i^T A = A_{i*}$
d) $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$
e) $(AB)^T = B^T A^T$
f) $A(B+C) = AB + AC$
g) matice $A^T A$ je symetrická

Příklad 5. Spočítejte $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{2017}$.

Domácí úkol č. 1: Stopu matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definujeme jako hodnotu $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$. Rozhodněte, zda pro matice $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ platí následující vlastnosti (dokažte nebo uveďte protipříklad):

a) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$,
b) $\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(CAB)$,
c) $\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(ACB)$,
d) $\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(ACB)$ pro A, B, C symetrické. [4 × 0.5 b]