Příklad 1. Rozhodněte, pro která $a, b \in \mathbb{R}$ je matice řádu $n \geq 2$ regulární:

$$\begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}$$

Příklad 2. Invertujte matice

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{c)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 3. Jak se změní inverzní matice k $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pokud k prvku a_{ij} přičteme $\alpha \in \mathbb{R}$? Nápověda:

$$(A + bc^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1 + c^T A^{-1} b} A^{-1} b c^T A^{-1}$$

Příklad 4. Invertujte matici řádu n s dvojkami na diagonále a jedničkami jinde:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Příklad 5. Vyjádřete:

a) $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1}$ pro $A \in \mathbb{R}^{m \times m}, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární,

a) $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1}$ pro $A \in \mathbb{R}^{m \times m}, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární,

a) $\begin{pmatrix} I & A & C \\ 0 & I & B \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}^{-1}$ pro A, B, C čtvercové.

Domácí úkol č. 3: Spočítejte

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}^{-1}.$$

[2 b]

Příklad 1. Rozhodněte, pro která $a, b \in \mathbb{R}$ je matice řádu $n \geq 2$ regulární:

$$\begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}$$

Příklad 2. Invertujte matice

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{c)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 3. Jak se změní inverzní matice k $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pokud k prvku a_{ij} přičteme $\alpha \in \mathbb{R}$?
Nápověda:

$$(A + bc^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1 + c^T A^{-1} b} A^{-1} b c^T A^{-1}$$

Příklad 4. Invertujte matici řádu n s dvojkami na diagonále a jedničkami jinde:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Příklad 5. Vyjádřete:

a) $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1}$ pro $A \in \mathbb{R}^{m \times m}, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární,

a) $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1}$ pro $A \in \mathbb{R}^{m \times m}, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární,

a) $\begin{pmatrix} I & A & C \\ 0 & I & B \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}^{-1}$ pro A, B, C čtvercové.

Domácí úkol č. 3: Spočítejte

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}^{-1}.$$

[2 b]