Příklad 1. Rozhodněte, zda je podgrupou:

a) $(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, +) \leq (\mathbb{R}, +)$,

b) $(\mathbb{Q}^+, \cdot) \leq (\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot)$, kde $\mathbb{Q}^+ = \{q \in \mathbb{Q} : q > 0\}$,

c) (sudá celá čísla, $+$) $\leq (\mathbb{Z}, +)$,

d) (lichá celá čísla, $+$) $\leq (\mathbb{Z}, +)$.

Příklad 2. Buďte $(H_1, \circ)$ a $(H_2, \circ)$ podgrupy grupy $(G, \circ)$. Ukažte, že

a) $(H_1 \cap H_2, \circ)$ je také podgrupa,

b) $(H_1 \cup H_2, \circ)$ je podgrupa právě tehdy, když $H_1 \subseteq H_2$ nebo $H_1 \supseteq H_2$.

Příklad 3. Mějme permutace

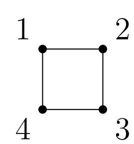
$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Spočítejte $p \circ q$, $q \circ p$, $\operatorname{sgn}(p)$, p^{-1} a $\operatorname{sgn}(p^{-1})$.

Příklad 4. Spočtěte mocniny p^{10} a q^{99} pro permutace

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 5. Najděte všechny symetrie čtverce (rotace, osové symetrie) a popište je permutacemi. Ověřte, že tato množina permutací je uzavřená vzhledem k inverzi.



Příklad 6. Rozhodněte, zda je tělesem:

a) $\{-1, 0, 1\}$ s klasickým sčítáním a násobením,

b) $\mathbb{Q}(i) = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Q}\}$ s klasickým sčítáním a násobením,

c) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ se sčítáním a násobením po složkách.

Domácí úkol č. 4: Určete znaménko permutace

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 2n \\ 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & 6 & \dots & 2n \end{pmatrix}.$$

[2 b]

Příklad 1. Rozhodněte, zda je podgrupou:

a) $(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, +) \leq (\mathbb{R}, +)$,

b) $(\mathbb{Q}^+, \cdot) \leq (\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot)$, kde $\mathbb{Q}^+ = \{q \in \mathbb{Q} : q > 0\}$,

c) (sudá celá čísla, $+$) $\leq (\mathbb{Z}, +)$,

d) (lichá celá čísla, $+$) $\leq (\mathbb{Z}, +)$.

Příklad 2. Buďte $(H_1, \circ)$ a $(H_2, \circ)$ podgrupy grupy $(G, \circ)$. Ukažte, že

a) $(H_1 \cap H_2, \circ)$ je také podgrupa,

b) $(H_1 \cup H_2, \circ)$ je podgrupa právě tehdy, když $H_1 \subseteq H_2$ nebo $H_1 \supseteq H_2$.

Příklad 3. Mějme permutace

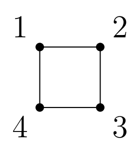
$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Spočítejte $p \circ q$, $q \circ p$, $\mathrm{sgn}(p)$, p^{-1} a $\mathrm{sgn}(p^{-1})$.

Příklad 4. Spočtěte mocniny p^{10} a q^{99} pro permutace

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 5. Najděte všechny symetrie čtverce (rotace, osové symetrie) a popište je permutacemi. Ověřte, že tato množina permutací je uzavřená vzhledem k inverzi.



Příklad 6. Rozhodněte, zda je tělesem:

a) $\{-1, 0, 1\}$ s klasickým sčítáním a násobením,

b) $\mathbb{Q}(i) = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Q}\}$ s klasickým sčítáním a násobením,

c) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ se sčítáním a násobením po složkách.

Domácí úkol č. 4: Určete znaménko permutace

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 2n \\ 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & 6 & \dots & 2n \end{pmatrix}.$$

[2 b]