Příklad 1. Rozhodněte, zda je tělesem:

a) $\{-1, 0, 1\}$ s klasickým sčítáním a násobením,

b) $\mathbb{Q}(i) = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Q}\}$ s klasickým sčítáním a násobením,

c) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ se sčítáním a násobením po složkách.

Příklad 2. Spočítejte v $\mathbb{Z}_5$ hodnoty $3 + 4$, -3, $4 \cdot 3$, 3^{-1}, $4/3$.

Příklad 3. Řešte soustavy rovnic bez výměny řádků:

$$\text{a)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{ nad } \mathbb{Z}_2, \qquad \text{b)} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right) \text{ nad } \mathbb{Z}_7.$$

Příklad 4. Invertujte matici $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_3$ a $\mathbb{Z}_5$.

Příklad 5. Rozhodněte, zda tvoří vektorový prostor

a) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{Q}$,

b) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{C}$,

c) $U \times V$ nad $\mathbb{T}$, kde U, V jsou vektorové prostory nad $\mathbb{T}$, sčítání a násobení definujeme po složkách.

Příklad 6. Definujte lineární kombinaci a rozhodněte, zda

a) vektor $(4, -1, 1)$ náleží do lineárního obalu vektorů $(2, 1, 1)$ a $(1, 2, 1)$,

b) jsou vektory $(1, 3, 2), (2, 5, 3), (2, 3, 1)$ lineárně nezávislé.

Domácí úkol č. 5: Rozhodněte, zda je tělesem:

a) $\mathbb{Z}(\sqrt{2}) = \{a + \sqrt{2}b : a, b \in \mathbb{Z}\}$ s klasickým sčítáním a násobením, [1 b]

b) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + \sqrt{2}b : a, b \in \mathbb{Q}\}$ s klasickým sčítáním a násobením. [1 b]

Příklad 1. Rozhodněte, zda je tělesem:

a) $\{-1, 0, 1\}$ s klasickým sčítáním a násobením,

b) $\mathbb{Q}(i) = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Q}\}$ s klasickým sčítáním a násobením,

c) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ se sčítáním a násobením po složkách.

Příklad 2. Spočítejte v $\mathbb{Z}_5$ hodnoty $3 + 4$, -3, $4 \cdot 3$, 3^{-1}, $4/3$.

Příklad 3. Řešte soustavy rovnic bez výměny řádků:

$$\text{a)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{ nad } \mathbb{Z}_2, \qquad \text{b)} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right) \text{ nad } \mathbb{Z}_7.$$

Příklad 4. Invertujte matici $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_3$ a $\mathbb{Z}_5$.

Příklad 5. Rozhodněte, zda tvoří vektorový prostor

a) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{Q}$,

b) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{C}$,

c) $U \times V$ nad $\mathbb{T}$, kde U, V jsou vektorové prostory nad $\mathbb{T}$, sčítání a násobení definujeme po složkách.

Příklad 6. Definujte lineární kombinaci a rozhodněte, zda

a) vektor $(4, -1, 1)$ náleží do lineárního obalu vektorů $(2, 1, 1)$ a $(1, 2, 1)$,

b) jsou vektory $(1, 3, 2), (2, 5, 3), (2, 3, 1)$ lineárně nezávislé.

Domácí úkol č. 5: Rozhodněte, zda je tělesem:

a) $\mathbb{Z}(\sqrt{2}) = \{a + \sqrt{2}b : a, b \in \mathbb{Z}\}$ s klasickým sčítáním a násobením, [1 b]

b) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + \sqrt{2}b : a, b \in \mathbb{Q}\}$ s klasickým sčítáním a násobením. [1 b]