Příklad 1. Nechť u, v, w jsou lineárně nezávislé vektory z prostoru V nad $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda jsou následující vektory lineárně nezávislé:

a) $\{0, u, v\}$,

b) $\{u, 2u, v\}$,

c) $\{u, v + w\}$,

d) $\{u, u + v, u + w\}$.

Příklad 2. Rozhodněte, zda následující množiny vektorů tvoří bázi $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 14 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 3. Najděte souřadnice vektoru $(5, 1, 2)^T$ vzhledem k bázi $(1, 2, 1)^T, (2, 5, 1)^T, (3, 2, 1)^T$ prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$.

Příklad 4. Doplňte množinu $(1, 2, 0, 0)^T, (2, 1, 1, 3)^T, (0, 1, 0, 1)^T$ na bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ nad $\mathbb{R}$.

Příklad 5. Rozhodněte, zda následující množiny vektorů tvoří bázi $\mathcal{P}^2$ (prostor reálných polynomů proměnné x stupně nanejvýš 2):

$$\text{a)}\ \{x^2 - x + 1, 2x + 1, 2x - 1\}, \qquad \text{b)}\ \{x + x^2, x - x^2\}.$$

Příklad 6. Nechť U, W jsou podprostory konečně generovaného vektorového prostoru V, pro které platí $U \subseteq W$. Dokažte, že platí

a) $\dim(U) \leq \dim(W)$,

b) $\dim(U) = \dim(W)$ právě tehdy, když $U = W$.

Domácí úkol č. 6: Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$. Rozhodněte, zda pro libovolné množiny $M, N \subseteq V$ platí následující vlastnosti lineárního obalu (dokažte, nebo uveďte protipříklad):

a) $M \subseteq N \Rightarrow \mathrm{span}(M) \Subset \mathrm{span}(N)$, [1 b]

b) $M \subseteq N \Leftarrow \mathrm{span}(M) \Subset \mathrm{span}(N)$. [1 b]

Příklad 1. Nechť u, v, w jsou lineárně nezávislé vektory z prostoru V nad $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda jsou následující vektory lineárně nezávislé:

a) $\{0, u, v\}$,

b) $\{u, 2u, v\}$,

c) $\{u, v + w\}$,

d) $\{u, u + v, u + w\}$.

Příklad 2. Rozhodněte, zda následující množiny vektorů tvoří bázi $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$:

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix}1\\-3\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-4\\14\end{pmatrix}, \qquad \text{b)}\ \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Příklad 3. Najděte souřadnice vektoru $(5, 1, 2)^T$ vzhledem k bázi $(1, 2, 1)^T, (2, 5, 1)^T, (3, 2, 1)^T$ prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$.

Příklad 4. Doplňte množinu $(1, 2, 0, 0)^T, (2, 1, 1, 3)^T, (0, 1, 0, 1)^T$ na bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ nad $\mathbb{R}$.

Příklad 5. Rozhodněte, zda následující množiny vektorů tvoří bázi $\mathcal{P}^2$ (prostor reálných polynomů proměnné x stupně nanejvýš 2):

$$\text{a)}\ \{x^2 - x + 1, 2x + 1, 2x - 1\}, \qquad \text{b)}\ \{x + x^2, x - x^2\}.$$

Příklad 6. Nechť U, W jsou podprostory konečně generovaného vektorového prostoru V, pro které platí $U \subseteq W$. Dokažte, že platí

a) $\dim(U) \leq \dim(W)$,

b) $\dim(U) = \dim(W)$ právě tehdy, když $U = W$.

Domácí úkol č. 6: Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$. Rozhodněte, zda pro libovolné množiny $M, N \subseteq V$ platí následující vlastnosti lineárního obalu (dokažte, nebo uveďte protipříklad):

a) $M \subseteq N \Rightarrow \mathrm{span}(M) \Subset \mathrm{span}(N)$, [1 b]

b) $M \subseteq N \Leftarrow \mathrm{span}(M) \Subset \mathrm{span}(N)$. [1 b]