Příklad 1.

a) Buď $a, b \in \mathbb{R}^n$. Určete $\operatorname{rank}(ab^T)$.
b) Rozhodněte, zda pro každé $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je $\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(BA)$.
c) Rozhodněte, zda existují $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tak, že $\operatorname{rank}(AB) < \min\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\}$.

Příklad 2. Uveďte různé podmínky pro regularitu matice. Je matice s jedním nulovým sloupcem (resp. řádkem) regulární nebo singulární?

Příklad 3. Rozhodněte, pro jaké hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ je matice regulární:

$$\begin{pmatrix} 2a+1 & a & 2a \\ a & 1 & a+1 \\ 2a & 0 & 2a \end{pmatrix}.$$

Příklad 4. Porovnejte množiny řešení soustav $Ax = b$ a $(QA)x = Qb$ pro matici Q regulární, resp. Q singulární.

Příklad 5. Invertujte matice elementárních řádkových úprav:

a) vynásobení i-tého řádku číslem $\alpha \neq 0$,
b) přičtení α-násobku i-tého řádku k j-tému pro $i \neq j$,
c) výměna i-tého a j-tého řádku.

Příklad 6. Převeďte matici A na redukovaný odstupňovaný tvar a zapište $\operatorname{RREF}(A)$ jako násobení A maticemi příslušných elementárních řádkových úprav. Co se stane po vynásobení A elementární maticí zprava?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad 7. Mějme matice $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární a $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Vyjádřete neznámou matici $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ze vztahů

a) $(AX)^T = D$,
b) $A(BX)^T C = D$,
c) $((X^{-1}A^{-1})^T - (B^T)^{-1})B^{-1} = 0$.

Příklad 1.

a) Buď $a, b \in \mathbb{R}^n$. Určete $\operatorname{rank}(ab^T)$.
b) Rozhodněte, zda pro každé $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je $\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(BA)$.
c) Rozhodněte, zda existují $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tak, že $\operatorname{rank}(AB) < \min\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\}$.

Příklad 2. Uveďte různé podmínky pro regularitu matice. Je matice s jedním nulovým sloupcem (resp. řádkem) regulární nebo singulární?

Příklad 3. Rozhodněte, pro jaké hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ je matice regulární:

$$\begin{pmatrix} 2a+1 & a & 2a \\ a & 1 & a+1 \\ 2a & 0 & 2a \end{pmatrix}.$$

Příklad 4. Porovnejte množiny řešení soustav $Ax = b$ a $(QA)x = Qb$ pro matici Q regulární, resp. Q singulární.

Příklad 5. Invertujte matice elementárních řádkových úprav:

a) vynásobení i-tého řádku číslem $\alpha \neq 0$,
b) přičtení α-násobku i-tého řádku k j-tému pro $i \neq j$,
c) výměna i-tého a j-tého řádku.

Příklad 6. Převeďte matici A na redukovaný odstupňovaný tvar a zapište $\mathrm{RREF}(A)$ jako násobení A maticemi příslušných elementárních řádkových úprav. Co se stane po vynásobení A elementární maticí zprava?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad 7. Mějme matice $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární a $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Vyjádřete neznámou matici $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ze vztahů

a) $(AX)^T = D$,
b) $A(BX)^T C = D$,
c) $((X^{-1}A^{-1})^T - (B^T)^{-1})B^{-1} = 0$.