

**Příklad 1.** Rozhodněte, zda je tělesem:

- a)  $\{-1, 0, 1\}$  s klasickým sčítáním a násobením,
- b)  $\mathbb{Z}(\sqrt{2}) = \{a + \sqrt{2}b : a, b \in \mathbb{Z}\}$  s klasickým sčítáním a násobením,
- c)  $\mathbb{Q}(i) = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Q}\}$  s klasickým sčítáním a násobením,
- d)  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$  se sčítáním a násobením po složkách.

**Příklad 2.** Spočítejte v  $\mathbb{Z}_5$  hodnoty  $3 + 4$ ,  $-3$ ,  $4 \cdot 3$ ,  $3^{-1}$ ,  $4/3$ .

**Příklad 3.** Určete hodnoty  $2^{101}$ ,  $3^{1001}$ ,  $4^{1000001}$  v tělese  $\mathbb{Z}_{17}$ .

**Příklad 4.** Řešte soustavy rovnic bez výměny řádků:

$$\text{a) } \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \text{ nad } \mathbb{Z}_2, \quad \text{b) } \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{array} \right) \text{ nad } \mathbb{Z}_7.$$

**Příklad 5.** Invertujte matice:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_3 \text{ a } \mathbb{Z}_5, \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_7 \text{ a } \mathbb{Z}_{11}.$$

**Příklad 6.** Určete počet regulárních matic řádu 2 nad tělesem  $\mathbb{Z}_p$ .

**Příklad 7.** Najděte matici  $A$ , která nad tělesem  $\mathbb{Z}_5$  splňuje rovnost

$$A \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Příklad 1.** Rozhodněte, zda je tělesem:

- a)  $\{-1, 0, 1\}$  s klasickým sčítáním a násobením,
- b)  $\mathbb{Z}(\sqrt{2}) = \{a + \sqrt{2}b : a, b \in \mathbb{Z}\}$  s klasickým sčítáním a násobením,
- c)  $\mathbb{Q}(i) = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Q}\}$  s klasickým sčítáním a násobením,
- d)  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$  se sčítáním a násobením po složkách.

**Příklad 2.** Spočítejte v  $\mathbb{Z}_5$  hodnoty  $3 + 4$ ,  $-3$ ,  $4 \cdot 3$ ,  $3^{-1}$ ,  $4/3$ .

**Příklad 3.** Určete hodnoty  $2^{101}$ ,  $3^{1001}$ ,  $4^{1000001}$  v tělese  $\mathbb{Z}_{17}$ .

**Příklad 4.** Řešte soustavy rovnic bez výměny řádků:

$$\text{a) } \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \text{ nad } \mathbb{Z}_2, \quad \text{b) } \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{array} \right) \text{ nad } \mathbb{Z}_7.$$

**Příklad 5.** Invertujte matice:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_3 \text{ a } \mathbb{Z}_5, \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_7 \text{ a } \mathbb{Z}_{11}.$$

**Příklad 6.** Určete počet regulárních matic řádu 2 nad tělesem  $\mathbb{Z}_p$ .

**Příklad 7.** Najděte matici  $A$ , která nad tělesem  $\mathbb{Z}_5$  splňuje rovnost

$$A \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$