Příklad 1. Rozhodněte, zda tvoří vektorový prostor

a) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{Q}$,

b) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{C}$,

c) $\mathbb{Z}_5^n$ nad $\mathbb{Z}_2$,

d) $U \times V$ nad $\mathbb{T}$, kde U, V jsou vektorové prostory nad $\mathbb{T}$, sčítání a násobení definujeme po složkách.

Příklad 2. Rozhodněte, zda následující množiny tvoří podprostory prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$:

a) $\mathcal{A} = \{(2s, s, |s|) : s \in \mathbb{R}\}$,

b) $\mathcal{B} = \{(s, 5t, 2s - t) : s, t \in \mathbb{R}\}$.

Příklad 3. Definujte lineární kombinaci a rozhodněte, zda

a) vektor $(4, -1, 1)$ náleží do lineárního obalu vektorů $(2, 1, 1)$ a $(1, 2, 1)$,

b) vektory $(1, 1, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)$ generují $\mathbb{R}^4$, resp. $\mathbb{Z}_2^4$.

Příklad 4. Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$. Rozhodněte, zda pro libovolné množiny $M, N \subseteq V$ platí následující vlastnosti lineárního obalu:

a) $M \subseteq N \Rightarrow \mathrm{span}(M) \Subset \mathrm{span}(N)$,

b) $M \subseteq N \Leftarrow \mathrm{span}(M) \Subset \mathrm{span}(N)$.

Příklad 5. Buď $M = \{a, b, c, d, e\}$ a uvažujme vektorový prostor 2^M všech podmnožin množiny M nad tělesem $\mathbb{Z}_2$, kde sčítání je chápáno jako výlučná disjunkce a pro $A \subseteq M$ je násobek množiny definován jako $0A = \emptyset$ a $1A = A$:

a) najděte nulový vektor o,

b) určete opačný vektor $-v$ k vektoru $v = \{a, b, c\}$,

c) vyhodnoťte lineární kombinaci $u + v - w - z$, kde $u = \{a, d\}$, $v = \{b, e\}$, $w = \{c, e\}$, $z = \{a, b, c\}$,

d) rozhodněte, zda vektor $\{a, b, c, d, e\}$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů u, v, w, z.

Příklad 6. Rozhodněte, zda platí $U = V$ pro prostory

a) $U = \mathrm{span}\{(1, 2, 0), (0, 1, -1)\}$, $V = \mathrm{span}\{(2, 1, 3), (-1, 0, -2)\}$,

b) $U = \mathrm{span}\{(1, 2, -1), (2, 1, 1)\}$, $V = \mathrm{span}\{(0, 3, -3), (3, 3, -1)\}$.

Příklad 1. Rozhodněte, zda tvoří vektorový prostor

a) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{Q}$,

b) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{C}$,

c) $\mathbb{Z}_5^n$ nad $\mathbb{Z}_2$,

d) $U \times V$ nad $\mathbb{T}$, kde U, V jsou vektorové prostory nad $\mathbb{T}$, sčítání a násobení definujeme po složkách.

Příklad 2. Rozhodněte, zda následující množiny tvoří podprostory prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$:

a) $\mathcal{A} = \{(2s, s, |s|) : s \in \mathbb{R}\}$,

b) $\mathcal{B} = \{(s, 5t, 2s - t) : s, t \in \mathbb{R}\}$.

Příklad 3. Definujte lineární kombinaci a rozhodněte, zda

a) vektor $(4, -1, 1)$ náleží do lineárního obalu vektorů $(2, 1, 1)$ a $(1, 2, 1)$,

b) vektory $(1, 1, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)$ generují $\mathbb{R}^4$, resp. $\mathbb{Z}_2^4$.

Příklad 4. Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$. Rozhodněte, zda pro libovolné množiny $M, N \subseteq V$ platí následující vlastnosti lineárního obalu:

a) $M \subseteq N \Rightarrow \mathrm{span}(M) \Subset \mathrm{span}(N)$,

b) $M \subseteq N \Leftarrow \mathrm{span}(M) \Subset \mathrm{span}(N)$.

Příklad 5. Buď $M = \{a, b, c, d, e\}$ a uvažujme vektorový prostor 2^M všech podmnožin množiny M nad tělesem $\mathbb{Z}_2$, kde sčítání je chápáno jako výlučná disjunkce a pro $A \subseteq M$ je násobek množiny definován jako $0A = \emptyset$ a $1A = A$:

a) najděte nulový vektor o,

b) určete opačný vektor $-v$ k vektoru $v = \{a, b, c\}$,

c) vyhodnoťte lineární kombinaci $u + v - w - z$, kde $u = \{a, d\}$, $v = \{b, e\}$, $w = \{c, e\}$, $z = \{a, b, c\}$,

d) rozhodněte, zda vektor $\{a, b, c, d, e\}$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů u, v, w, z.

Příklad 6. Rozhodněte, zda platí $U = V$ pro prostory

a) $U = \mathrm{span}\{(1, 2, 0), (0, 1, -1)\}$, $V = \mathrm{span}\{(2, 1, 3), (-1, 0, -2)\}$,

b) $U = \mathrm{span}\{(1, 2, -1), (2, 1, 1)\}$, $V = \mathrm{span}\{(0, 3, -3), (3, 3, -1)\}$.