Příklad 1. Rozhodněte, zda následující tvoří podprostor prostoru reálných posloupností $\mathbb{R}^\infty$:

a) posloupnosti tvaru $(a, b, c, a, b, c, a, b, c, \dots)$ pro $a, b, c \in \mathbb{R}$,

b) posloupnosti s nekonečně mnoha nulovými prvky,

c) posloupnosti s konečně mnoha nenulovými prvky,

d) neklesající posloupnosti,

e) aritmetické posloupnosti ($x_i - x_{i-1}$ je konstantní).

Příklad 2. Nechť u, v, w jsou lineárně nezávislé vektory z prostoru V nad $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda jsou následující vektory lineárně nezávislé:

a) $\{0, u, v\}$,

b) $\{u, 2u, v\}$,

c) $\{u, v + w\}$,

d) $\{u, u + v, u + w\}$.

Příklad 3. Rozhodněte, zda jsou vektory lineárně nezávislé:

a) $\{(1, 3, 2), (2, 5, 3), (2, 3, 1)\}$ v prostoru $\mathbb{R}^3$,

b) $\{-x^2, x^2 + x, x^3 - 1\}$ v prostoru $\mathcal{P}^3$ reálných polynomů stupně nejvýše tři,

c) $\{2x - 1, x - 1, 3x\}$ v prostoru reálných funkcí $\mathcal{F}$,

d) $\{\sin x, \cos x\}$ v prostoru reálných funkcí $\mathcal{F}$.

Příklad 4. Najděte množinu aritmetických vektorů se složkami z $\{0, 1, 2\}$ tak, aby

a) byly lineárně závislé v $\mathbb{R}^n$ i v $\mathbb{Z}_3^n$,

b) byly lineárně nezávislé v $\mathbb{R}^n$ i v $\mathbb{Z}_3^n$,

c) byly lineárně nezávislé v $\mathbb{R}^n$, ale závislé v $\mathbb{Z}_3^n$,

d) byly lineárně závislé v $\mathbb{R}^n$, ale nezávislé v $\mathbb{Z}_3^n$.

Příklad 5. Rozhodněte, zda následující množiny vektorů tvoří bázi $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 14 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 6. Najděte příklad vektorového prostoru jehož bázi tvoří on sám.

Příklad 7. V prostoru $\mathcal{P}^2$ najděte souřadnice vektoru $x^2 + 2$ vzhledem k bázi $x^2 + 1$, $x - 2$, $2x^2 + x - 1$.

Příklad 1. Rozhodněte, zda následující tvoří podprostor prostoru reálných posloupností $\mathbb{R}^\infty$:

a) posloupnosti tvaru $(a, b, c, a, b, c, a, b, c, \dots)$ pro $a, b, c \in \mathbb{R}$,

b) posloupnosti s nekonečně mnoha nulovými prvky,

c) posloupnosti s konečně mnoha nenulovými prvky,

d) neklesající posloupnosti,

e) aritmetické posloupnosti ($x_i - x_{i-1}$ je konstantní).

Příklad 2. Nechť u, v, w jsou lineárně nezávislé vektory z prostoru V nad $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda jsou následující vektory lineárně nezávislé:

a) $\{0, u, v\}$,

b) $\{u, 2u, v\}$,

c) $\{u, v + w\}$,

d) $\{u, u + v, u + w\}$.

Příklad 3. Rozhodněte, zda jsou vektory lineárně nezávislé:

a) $\{(1, 3, 2), (2, 5, 3), (2, 3, 1)\}$ v prostoru $\mathbb{R}^3$,

b) $\{-x^2, x^2 + x, x^3 - 1\}$ v prostoru $\mathcal{P}^3$ reálných polynomů stupně nejvýše tři,

c) $\{2x - 1, x - 1, 3x\}$ v prostoru reálných funkcí $\mathcal{F}$,

d) $\{\sin x, \cos x\}$ v prostoru reálných funkcí $\mathcal{F}$.

Příklad 4. Najděte množinu aritmetických vektorů se složkami z $\{0, 1, 2\}$ tak, aby

a) byly lineárně závislé v $\mathbb{R}^n$ i v $\mathbb{Z}_3^n$,

b) byly lineárně nezávislé v $\mathbb{R}^n$ i v $\mathbb{Z}_3^n$,

c) byly lineárně nezávislé v $\mathbb{R}^n$, ale závislé v $\mathbb{Z}_3^n$,

d) byly lineárně závislé v $\mathbb{R}^n$, ale nezávislé v $\mathbb{Z}_3^n$.

Příklad 5. Rozhodněte, zda následující množiny vektorů tvoří bázi $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 14 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 6. Najděte příklad vektorového prostoru jehož bázi tvoří on sám.

Příklad 7. V prostoru $\mathcal{P}^2$ najděte souřadnice vektoru $x^2 + 2$ vzhledem k bázi $x^2 + 1$, $x - 2$, $2x^2 + x - 1$.