Příklad 0. Mějme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}^2$ a $g\colon \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}^3$ zadané následovně:

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= 2x^2+x+2, & \qquad g(2x^2+x) &= (2,-1,8),\\ f(0,1,0) &= -2x+1, & g(x^2+x) &= (3,2,5),\\ f(0,0,1) &= 3x^2+3, & g(-x^2-x+1) &= (-1,3,-9). \end{aligned}$$

a) Najděte bázi jádra a obrazu zobrazení f.
b) Spočítejte matici složeného zobrazení $g \circ f$ vzhledem ke kanonické bázi. Je toto zobrazení prosté a je na?

Příklad 1. Najděte LU rozklad matice A a vyřešte soustavu $Ax = b$:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 12 \\ 0 & 2 & -10 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 2. Rozhodněte, zda jsou následující vektory afinně nezávislé:

$$x_0 = (1,2,3), \quad x_1 = (2,2,1), \quad x_2 = (1,3,2), \quad x_3 = (2,1,3).$$

Příklad 3. Rozhodněte, zda platí $M = N$ pro afinní prostory

a) $M = (1,1) + \operatorname{span}\{(1,2)\}$, $N = (2,3) + \operatorname{span}\{(2,4)\}$,
b) $M = (1,0,0) + \operatorname{span}\{(1,2,1),(2,1,0)\}$, $N = (2,-1,-1) + \operatorname{span}\{(0,3,2),(3,0,-1)\}$.

Příklad 4. Rozhodněte, zda jsou následující zobrazení afinní:

a) $f\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ s předpisem $f(A) = 2A + B$, kde $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je pevná matice,
b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ s předpisem $f(x_1,x_2) = (x_1+1, 1)$.

Příklad 5. Buď $S = \{a, v_1, \ldots, v_n\}$ souřadný systém reálného afinního podprostoru $M = V + a$ a označme $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Dokažte, že platí:

a) pro každé $u, v \in M$ je $[u-v]_B = [u]_S - [v]_S$,
b) pro každé $u \in M, v \in V$ je $[u+v]_S = [u]_S + [v]_B$.

Příklad 6. Dokažte následující tvrzení:

a) Obraz afinního podprostoru při afinním zobrazení je afinní podprostor.
b) Složením dvou afinních zobrazení dostaneme opět afinní zobrazení.

Příklad 0. Mějme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}^2$ a $g\colon \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}^3$ zadané následovně:

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= 2x^2 + x + 2, & g(2x^2 + x) &= (2,-1,8),\\ f(0,1,0) &= -2x + 1, & g(x^2 + x) &= (3,2,5),\\ f(0,0,1) &= 3x^2 + 3, & g(-x^2 - x + 1) &= (-1,3,-9). \end{aligned}$$

a) Najděte bázi jádra a obrazu zobrazení f.
b) Spočítejte matici složeného zobrazení $g \circ f$ vzhledem ke kanonické bázi. Je toto zobrazení prosté a je na?

Příklad 1. Najděte LU rozklad matice A a vyřešte soustavu $Ax = b$:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 12 \\ 0 & 2 & -10 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 2. Rozhodněte, zda jsou následující vektory afinně nezávislé:

$$x_0 = (1,2,3), \quad x_1 = (2,2,1), \quad x_2 = (1,3,2), \quad x_3 = (2,1,3).$$

Příklad 3. Rozhodněte, zda platí $M = N$ pro afinní prostory

a) $M = (1,1) + \operatorname{span}\{(1,2)\}$, $N = (2,3) + \operatorname{span}\{(2,4)\}$,
b) $M = (1,0,0) + \operatorname{span}\{(1,2,1),(2,1,0)\}$, $N = (2,-1,-1) + \operatorname{span}\{(0,3,2),(3,0,-1)\}$.

Příklad 4. Rozhodněte, zda jsou následující zobrazení afinní:

a) $f\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ s předpisem $f(A) = 2A + B$, kde $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je pevná matice,
b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ s předpisem $f(x_1, x_2) = (x_1 + 1, 1)$.

Příklad 5. Buď $S = \{a, v_1, \dots, v_n\}$ souřadný systém reálného afinního podprostoru $M = V + a$ a označme $B = \{v_1, \dots, v_n\}$. Dokažte, že platí:

a) pro každé $u, v \in M$ je $[u - v]_B = [u]_S - [v]_S$,
b) pro každé $u \in M, v \in V$ je $[u + v]_S = [u]_S + [v]_B$.

Příklad 6. Dokažte následující tvrzení:

a) Obraz afinního podprostoru při afinním zobrazení je afinní podprostor.
b) Složením dvou afinních zobrazení dostaneme opět afinní zobrazení.