**Příklad 1.** Rozhodněte, zda tvoří vektorový prostor

a) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{Q}$,

b) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{C}$,

c) $U \times V$ nad $\mathbb{T}$, kde $U, V$ jsou vektorové prostory nad $\mathbb{T}$, sčítání a násobení definujeme po složkách.

**Příklad 2.** Rozhodněte, zda následující množiny tvoří podprostory prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$:

a) $\mathcal{A} = \{(2s, s, |s|) : s \in \mathbb{R}\}$,

b) $\mathcal{B} = \{(s, 5t, 2s - t) : s, t \in \mathbb{R}\}$.

**Příklad 3.** Definujte lineární kombinaci a rozhodněte, zda

a) vektor $(4, -1, 1)$ náleží do lineárního obalu vektorů $(2, 1, 1)$ a $(1, 2, 1)$,

b) jsou vektory $(1, 3, 2), (2, 5, 3), (2, 3, 1)$ lineárně nezávislé.

**Příklad 4.** Buď $V$ vektorový prostor nad $\mathbb{T}$. Rozhodněte, zda pro libovolné množiny $M, N \subseteq V$ platí následující vlastnosti lineárního obalu:

a) $M \subseteq N \Rightarrow \mathrm{span}(M) \Subset \mathrm{span}(N)$,

b) $M \subseteq N \Leftarrow \mathrm{span}(M) \Subset \mathrm{span}(N)$.

**Příklad 5.** Nechť $u, v, w$ jsou lineárně nezávislé vektory z prostoru $V$ nad $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda jsou následující vektory lineárně nezávislé:

a) $\{0, u, v\}$,

b) $\{u, 2u, v\}$,

c) $\{u, v + w\}$,

d) $\{u, u + v, u + w\}$.

**Příklad 6.** Rozhodněte, zda následující množiny vektorů tvoří bázi $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$:

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 14 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

**Příklad 1.** Rozhodněte, zda tvoří vektorový prostor

a) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{Q}$,

b) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{C}$,

c) $U \times V$ nad $\mathbb{T}$, kde $U, V$ jsou vektorové prostory nad $\mathbb{T}$, sčítání a násobení definujeme po složkách.

**Příklad 2.** Rozhodněte, zda následující množiny tvoří podprostory prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$:

a) $\mathcal{A} = \{(2s, s, |s|) : s \in \mathbb{R}\}$,

b) $\mathcal{B} = \{(s, 5t, 2s - t) : s, t \in \mathbb{R}\}$.

**Příklad 3.** Definujte lineární kombinaci a rozhodněte, zda

a) vektor $(4, -1, 1)$ náleží do lineárního obalu vektorů $(2, 1, 1)$ a $(1, 2, 1)$,

b) jsou vektory $(1, 3, 2), (2, 5, 3), (2, 3, 1)$ lineárně nezávislé.

**Příklad 4.** Buď $V$ vektorový prostor nad $\mathbb{T}$. Rozhodněte, zda pro libovolné množiny $M, N \subseteq V$ platí následující vlastnosti lineárního obalu:

a) $M \subseteq N \Rightarrow \mathrm{span}(M) \Subset \mathrm{span}(N)$,

b) $M \subseteq N \Leftarrow \mathrm{span}(M) \Subset \mathrm{span}(N)$.

**Příklad 5.** Nechť $u, v, w$ jsou lineárně nezávislé vektory z prostoru $V$ nad $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda jsou následující vektory lineárně nezávislé:

a) $\{0, u, v\}$,

b) $\{u, 2u, v\}$,

c) $\{u, v + w\}$,

d) $\{u, u + v, u + w\}$.

**Příklad 6.** Rozhodněte, zda následující množiny vektorů tvoří bázi $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 14 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$