

Příklad 1. Rozhodněte, zda následující tvoří podprostor prostoru reálných posloupností \mathbb{R}^∞ :

- posloupnosti tvaru $(a, b, c, a, b, c, a, b, c, \dots)$ pro $a, b, c \in \mathbb{R}$,
- posloupnosti s nekonečně mnoha nulovými prvky,
- posloupnosti s konečně mnoha nenulovými prvky,
- rostoucí/neklesající posloupnosti,
- aritmetické posloupnosti ($x_i - x_{i-1}$ je konstantní),
- fibonaccióvké posloupnosti ($x_{i+1} = x_i + x_{i-1}$).

Příklad 2. Buď $M = \{a, b, c, d, e\}$ a uvažujme vektorový prostor 2^M všech podmnožin množiny M nad tělesem \mathbb{Z}_2 , kde sčítání je chápáno jako výlučná disjunkce a pro $A \subseteq M$ je násobek množiny definován jako $0A = \emptyset$ a $1A = A$:

- najděte nulový vektor o ,
- určete opačný vektor $-v$ k vektoru $v = \{a, b, c\}$,
- vyhodnoťte lineární kombinaci $u + v - w - z$, kde $u = \{a, d\}$, $v = \{b, e\}$, $w = \{c, e\}$, $z = \{a, b, c\}$,
- rozhodněte, zda vektor $\{a, b, c, d, e\}$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů u, v, w, z .

Příklad 3. Zjistěte, zda jsou vektory z prostoru reálných funkcí \mathcal{F} lineárně nezávislé:

- $\{2x - 1, x - 1, 3x\}$,
- $\{\sin x, \cos x\}$,
- $\{\sin(x + 1), \sin(x + 2), \sin(x + 3)\}$. *Nápověda:* $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

Příklad 4. Doplňte množinu M na bázi vektorového prostoru.

- $M = \{(1, 2, 0, 0), (2, 1, 1, 3), (0, 1, 0, 1)\}$ v prostoru \mathbb{R}^4 ,
- $M = \{-x^2, x^2 + x, x^3 - 1\}$ v prostoru reálných polynomů stupně nejvýše tři.

Příklad 5. Souřadnice vektoru u vzhledem k bázi $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ jsou $[v]_B = (a_1, a_2, a_3, a_4)$. Určete souřadnice vektoru u vzhledem k bázi

- $B' = \{v_4, v_3, v_2, v_1\}$,
- $B' = \{v_1 + v_4, v_2, v_3, v_4\}$,
- $B' = \{v_1 + v_4, v_2 + v_3, v_4, v_2\}$.

Příklad 6. V prostoru \mathcal{P}^2 najděte souřadnice vektoru $x^2 + 2$ vzhledem k bázi $x^2 + 1, x - 2, 2x^2 + x - 1$.

Příklad 7. Najděte příklad vektorového prostoru jehož bázi tvoří on sám.

Příklad 1. Rozhodněte, zda následující tvoří podprostor prostoru reálných posloupností \mathbb{R}^∞ :

- posloupnosti tvaru $(a, b, c, a, b, c, a, b, c, \dots)$ pro $a, b, c \in \mathbb{R}$,
- posloupnosti s nekonečně mnoha nulovými prvky,
- posloupnosti s konečně mnoha nenulovými prvky,
- rostoucí/neklesající posloupnosti,
- aritmetické posloupnosti ($x_i - x_{i-1}$ je konstantní),
- fibonaccijské posloupnosti ($x_{i+1} = x_i + x_{i-1}$).

Příklad 2. Buď $M = \{a, b, c, d, e\}$ a uvažujme vektorový prostor 2^M všech podmnožin množiny M nad tělesem \mathbb{Z}_2 , kde sčítání je chápáno jako výlučná disjunkce a pro $A \subseteq M$ je násobek množiny definován jako $0A = \emptyset$ a $1A = A$:

- najděte nulový vektor o ,
- určete opačný vektor $-v$ k vektoru $v = \{a, b, c\}$,
- vyhodnoťte lineární kombinaci $u + v - w - z$, kde $u = \{a, d\}$, $v = \{b, e\}$, $w = \{c, e\}$, $z = \{a, b, c\}$,
- rozhodněte, zda vektor $\{a, b, c, d, e\}$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů u, v, w, z .

Příklad 3. Zjistěte, zda jsou vektory z prostoru reálných funkcí \mathcal{F} lineárně nezávislé:

- $\{2x - 1, x - 1, 3x\}$,
- $\{\sin x, \cos x\}$,
- $\{\sin(x + 1), \sin(x + 2), \sin(x + 3)\}$. *Nápověda:* $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

Příklad 4. Doplňte množinu M na bázi vektorového prostoru.

- $M = \{(1, 2, 0, 0), (2, 1, 1, 3), (0, 1, 0, 1)\}$ v prostoru \mathbb{R}^4 ,
- $M = \{-x^2, x^2 + x, x^3 - 1\}$ v prostoru reálných polynomů stupně nejvýše tři.

Příklad 5. Souřadnice vektoru u vzhledem k bázi $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ jsou $[v]_B = (a_1, a_2, a_3, a_4)$. Určete souřadnice vektoru u vzhledem k bázi

- $B' = \{v_4, v_3, v_2, v_1\}$,
- $B' = \{v_1 + v_4, v_2, v_3, v_4\}$,
- $B' = \{v_1 + v_4, v_2 + v_3, v_4, v_2\}$.

Příklad 6. V prostoru \mathcal{P}^2 najděte souřadnice vektoru $x^2 + 2$ vzhledem k bázi $x^2 + 1, x - 2, 2x^2 + x - 1$.

Příklad 7. Najděte příklad vektorového prostoru jehož bázi tvoří on sám.