Příklad 1. Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$. Rozhodněte, zda pro libovolné množiny $M, N \subseteq V$ platí následující vlastnosti lineárního obalu:

a) $M \subseteq N \Rightarrow \operatorname{span}(M) \Subset \operatorname{span}(N)$,
b) $M \subseteq N \Leftarrow \operatorname{span}(M) \Subset \operatorname{span}(N)$.

Příklad 2. Rozhodněte, zda následující množiny vektorů tvoří bázi $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$:

$$\text{a)} \begin{pmatrix}1\\-3\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-4\\14\end{pmatrix}, \qquad \text{b)} \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Příklad 3. Najděte příklad vektorového prostoru jehož bázi tvoří on sám.

Příklad 4. V prostoru $\mathcal{P}^2$ najděte souřadnice vektoru x^2+2 vzhledem k bázi x^2+1, $x-2$, $2x^2+x-1$.

Příklad 5. Doplňte množinu M na bázi vektorového prostoru:

a) $M = \{-x^2, x^2+x, x^3-1\}$ v prostoru $\mathcal{P}^3$ reálných polynomů stupně nejvýše tři,
b) $M = \left\{\begin{pmatrix}0 & 3\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\2 & 0\end{pmatrix}\right\}$ v prostoru $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Příklad 6. Souřadnice vektoru u vzhledem k bázi $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ jsou $[u]_B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$. Určete souřadnice vektoru u vzhledem k bázi

a) $B' = \{v_4, v_3, v_2, v_1\}$,
b) $B' = \{v_1 + v_4, v_2, v_3, v_4\}$,
c) $B' = \{v_1 + v_4, v_2 + v_3, v_4, v_2\}$.

Příklad 7. Buď $u_1, \ldots, u_m$ báze vektorového prostoru U nad $\mathbb{T}$ a $v_1, \ldots, v_n$ báze prostoru V nad $\mathbb{T}$. Najděte bázi $U \times V$ a určete dimenzi tohoto prostoru.

Příklad 8. Spočítejte $\dim(U \cap V)$ pro podprostory $\mathbb{Z}_2^3$:

$$U = \operatorname{span}\{(0,1,0),(1,1,0)\}, \qquad V = \operatorname{span}\{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}.$$

Příklad 1. Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$. Rozhodněte, zda pro libovolné množiny $M, N \subseteq V$ platí následující vlastnosti lineárního obalu:

a) $M \subseteq N \Rightarrow \operatorname{span}(M) \Subset \operatorname{span}(N)$,
b) $M \subseteq N \Leftarrow \operatorname{span}(M) \Subset \operatorname{span}(N)$.

Příklad 2. Rozhodněte, zda následující množiny vektorů tvoří bázi $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 14 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 3. Najděte příklad vektorového prostoru jehož bázi tvoří on sám.

Příklad 4. V prostoru $\mathcal{P}^2$ najděte souřadnice vektoru x^2+2 vzhledem k bázi x^2+1, $x-2$, $2x^2+x-1$.

Příklad 5. Doplňte množinu M na bázi vektorového prostoru:

a) $M = \{-x^2, x^2+x, x^3-1\}$ v prostoru $\mathcal{P}^3$ reálných polynomů stupně nejvýše tři,
b) $M = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ v prostoru $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Příklad 6. Souřadnice vektoru u vzhledem k bázi $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ jsou $[u]_B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$. Určete souřadnice vektoru u vzhledem k bázi

a) $B' = \{v_4, v_3, v_2, v_1\}$,
b) $B' = \{v_1 + v_4, v_2, v_3, v_4\}$,
c) $B' = \{v_1 + v_4, v_2 + v_3, v_4, v_2\}$.

Příklad 7. Buď $u_1, \ldots, u_m$ báze vektorového prostoru U nad $\mathbb{T}$ a $v_1, \ldots, v_n$ báze prostoru V nad $\mathbb{T}$. Najděte bázi $U \times V$ a určete dimenzi tohoto prostoru.

Příklad 8. Spočítejte $\dim(U \cap V)$ pro podprostory $\mathbb{Z}_2^3$:

$$U = \operatorname{span}\{(0,1,0), (1,1,0)\}, \qquad V = \operatorname{span}\{(0,1,1), (1,0,1), (1,1,0)\}.$$