Příklad 1. Nad tělesy $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Z}_5$ rozhodněte, zda pro $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ platí

a) $(1,2)^T \in \mathrm{Ker}(A)$,
b) $(1,2)^T \in \mathcal{S}(A)$.

Příklad 2. Najděte bázi a určete dimenzi prostoru generovaného vektory

$$(2,4,4,4),\ (-3,-4,2,0),\ (5,7,-2,1)$$

pomocí sloupcového a řádkového prostoru matice.

Příklad 3. Najděte báze prostorů $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{S}(A)$ a $\mathrm{Ker}(A)$ pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Příklad 4. Rozhodněte, zda pro matice $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ platí

a) $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(B)$ právě tehdy, když $\mathrm{RREF}(A) = \mathrm{RREF}(B)$,
b) $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B)$ právě tehdy, když $\mathrm{RREF}(A) = \mathrm{RREF}(B)$.

Příklad 5. Rozhodněte, zda platí $U = V$ pro prostory

a) $U = \mathrm{span}\{(1,2,0),(0,1,-1)\}$, $V = \mathrm{span}\{(2,1,3),(-1,0,-2)\}$,
b) $U = \mathrm{span}\{(1,2,-1),(2,1,1)\}$, $V = \mathrm{span}\{(0,3,-3),(3,3,-1)\}$.

Příklad 6. Rozhodněte, zda jsou následující zobrazení lineární:

a) $f(x) = 2x - 1$, kde $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
b) $f(x,y,z) = (x-y,z)$, kde $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,
c) $f(x,y) = (0,0)$, kde $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,
d) $f(x,y) = (x^2,y)$, kde $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,
e) $f(A) = A^T$, kde $f\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$,
f) $f(A) = \mathrm{RREF}(A)$, kde $f\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$.

Příklad 7. Najděte obraz vektoru $(-1,1,2)$ při lineárním zobrazení definovaném

$$f(1,0,0) = (1,1),\ \ f(0,1,0) = (-1,2),\ \ f(0,0,1) = (0,0).$$

Příklad 8. Pro zobrazení $f\colon \mathcal{P}^3 \to \mathcal{P}^4$ s předpisem $p(x) \mapsto x \cdot p(x)$ rozhodněte, zda následující vektory patří do obrazu a jádra f:

a) x^3,
b) 0,
c) 42,
d) $2x - 4x^3$.

Příklad 1. Nad tělesy $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Z}_5$ rozhodněte, zda pro $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ platí

a) $(1,2)^T \in \mathrm{Ker}(A)$,
b) $(1,2)^T \in \mathcal{S}(A)$.

Příklad 2. Najděte bázi a určete dimenzi prostoru generovaného vektory

$$(2,4,4,4),\ (-3,-4,2,0),\ (5,7,-2,1)$$

pomocí sloupcového a řádkového prostoru matice.

Příklad 3. Najděte báze prostorů $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{S}(A)$ a $\mathrm{Ker}(A)$ pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Příklad 4. Rozhodněte, zda pro matice $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ platí

a) $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(B)$ právě tehdy, když $\mathrm{RREF}(A) = \mathrm{RREF}(B)$,
b) $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B)$ právě tehdy, když $\mathrm{RREF}(A) = \mathrm{RREF}(B)$.

Příklad 5. Rozhodněte, zda platí $U = V$ pro prostory

a) $U = \mathrm{span}\{(1,2,0),(0,1,-1)\}$, $V = \mathrm{span}\{(2,1,3),(-1,0,-2)\}$,
b) $U = \mathrm{span}\{(1,2,-1),(2,1,1)\}$, $V = \mathrm{span}\{(0,3,-3),(3,3,-1)\}$.

Příklad 6. Rozhodněte, zda jsou následující zobrazení lineární:

a) $f(x) = 2x - 1$, kde $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
b) $f(x,y,z) = (x-y,z)$, kde $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,
c) $f(x,y) = (0,0)$, kde $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,
d) $f(x,y) = (x^2,y)$, kde $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,
e) $f(A) = A^T$, kde $f\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$,
f) $f(A) = \mathrm{RREF}(A)$, kde $f\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$.

Příklad 7. Najděte obraz vektoru $(-1,1,2)$ při lineárním zobrazení definovaném

$$f(1,0,0) = (1,1),\ \ f(0,1,0) = (-1,2),\ \ f(0,0,1) = (0,0).$$

Příklad 8. Pro zobrazení $f\colon \mathcal{P}^3 \to \mathcal{P}^4$ s předpisem $p(x) \mapsto x \cdot p(x)$ rozhodněte, zda následující vektory patří do obrazu a jádra f:

a) x^3,
b) 0,
c) 42,
d) $2x - 4x^3$.