Příklad 1. Rozhodněte, zda jsou následující zobrazení lineární:

a) $f(x, y) = (0, 0)$, kde $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,
b) $f(x, y) = (x^2, y)$, kde $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,
c) $f(A) = A^T$, kde $f\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$,
d) $f(A) = \mathrm{RREF}(A)$, kde $f\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$.

Příklad 2. Najděte obraz vektoru $(-1, 1, 2)$ při lineárním zobrazení definovaném

$$f(1, 0, 0) = (1, 1),\ f(0, 1, 0) = (-1, 2),\ f(0, 0, 1) = (0, 0).$$

Příklad 3. Nechť $f, g\colon U \to V$ a $h\colon V \to W$ jsou lineární zobrazení. Dokažte, že $f + g$, cf a $h \circ g$ jsou také lineární zobrazení.

Příklad 4. Pro zobrazení $f\colon \mathcal{P}^3 \to \mathcal{P}^4$ s předpisem $p(x) \mapsto x \cdot p(x)$ rozhodněte, zda vektory 0, 42 a $2x - 4x^3$ patří do obrazu a jádra f.

Příklad 5. Najděte matici následujících lineárních zobrazení v rovině vzhledem ke kanonické bázi:

a) osová souměrnost podle osy 1. a 3. kvadrantu,
b) otočení o 90° kolem počátku proti směru hodinových ručiček,
c) otočení o úhel α kolem počátku proti směru hodinových ručiček.

Příklad 6. Uvažujme v $\mathbb{R}^3$ báze

$$B_1 = \{(1, 1, 1), (0, 1, -1), (2, 0, 1)\}, \quad B_2 = \{(3, 2, 2), (1, 0, 1), (1, 2, 2)\}.$$

a) Sestrojte matici přechodu od báze B_2 do kanonické báze.
b) Sestrojte matici přechodu od kanonické báze do B_1.
c) Určete souřadnice vektoru $(1, 2, 0)$ vzhledem k bázi B_1.
d) Sestrojte matici přechodu od báze B_2 k bázi B_1.

Příklad 7. Buď

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B' = \{(1, 1, 0)^T, (1, 0, 0)^T, (0, 1, -1)^T\}.$$

Najděte bázi B tak, aby A byla maticí přechodu

a) od báze B do báze B', tj. ${}_{B'}[id]_B$,
b) od báze B' do báze B, tj. ${}_B[id]_{B'}$.

Příklad 8. Určete matici přechodu od báze B do báze B' prostoru $\mathcal{P}^2$, je-li

$$B = \{x^2 + 1, x^2 - 3x + 1, x^2 + x + 3\}, \qquad B' = \{x^2 + 2x + 1, 2x^2 + 1, x^2 - x\}.$$

Příklad 9. Uvažujme lineární zobrazení $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathcal{P}^2$ zadané maticí

$${}_{B_1}[f]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vzhledem k bázi $B_1 = \{1, 1 + x, x^2\}$. Najděte matici zobrazení ${}_{B_2}[f]_{B_2}$ pro $B_2 = \{1, x, 1 + x^2\}$.

Příklad 1. Rozhodněte, zda jsou následující zobrazení lineární:

a) $f(x,y) = (0,0)$, kde $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,
b) $f(x,y) = (x^2,y)$, kde $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,
c) $f(A) = A^T$, kde $f\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$,
d) $f(A) = \mathrm{RREF}(A)$, kde $f\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$.

Příklad 2. Najděte obraz vektoru $(-1,1,2)$ při lineárním zobrazení definovaném

$$f(1,0,0) = (1,1),\ f(0,1,0) = (-1,2),\ f(0,0,1) = (0,0).$$

Příklad 3. Nechť $f,g\colon U \to V$ a $h\colon V \to W$ jsou lineární zobrazení. Dokažte, že $f+g$, cf a $h \circ g$ jsou také lineární zobrazení.

Příklad 4. Pro zobrazení $f\colon \mathcal{P}^3 \to \mathcal{P}^4$ s předpisem $p(x) \mapsto x \cdot p(x)$ rozhodněte, zda vektory 0, 42 a $2x - 4x^3$ patří do obrazu a jádra f.

Příklad 5. Najděte matici následujících lineárních zobrazení v rovině vzhledem ke kanonické bázi:

a) osová souměrnost podle osy 1. a 3. kvadrantu,
b) otočení o 90° kolem počátku proti směru hodinových ručiček,
c) otočení o úhel α kolem počátku proti směru hodinových ručiček.

Příklad 6. Uvažujme v $\mathbb{R}^3$ báze

$$B_1 = \{(1,1,1),(0,1,-1),(2,0,1)\}, \quad B_2 = \{(3,2,2),(1,0,1),(1,2,2)\}.$$

a) Sestrojte matici přechodu od báze B_2 do kanonické báze.
b) Sestrojte matici přechodu od kanonické báze do B_1.
c) Určete souřadnice vektoru $(1,2,0)$ vzhledem k bázi B_1.
d) Sestrojte matici přechodu od báze B_2 k bázi B_1.

Příklad 7. Buď

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B' = \{(1,1,0)^T,(1,0,0)^T,(0,1,-1)^T\}.$$

Najděte bázi B tak, aby A byla maticí přechodu

a) od báze B do báze B', tj. ${}_{B'}[id]_B$,
b) od báze B' do báze B, tj. ${}_{B}[id]_{B'}$.

Příklad 8. Určete matici přechodu od báze B do báze B' prostoru $\mathcal{P}^2$, je-li

$$B = \{x^2+1, x^2-3x+1, x^2+x+3\}, \qquad B' = \{x^2+2x+1, 2x^2+1, x^2-x\}.$$

Příklad 9. Uvažujme lineární zobrazení $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathcal{P}^2$ zadané maticí

$${}_{B_1}[f]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vzhledem k bázi $B_1 = \{1, 1+x, x^2\}$. Najděte matici zobrazení ${}_{B_2}[f]_{B_2}$ pro $B_2 = \{1, x, 1+x^2\}$.