

Příklad 1. Spočítejte $A + B$, $2 \cdot A$, $A \cdot B$, $B \cdot C$, $C \cdot B$ a C^T pro matice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 8 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -2 \\ 6 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Příklad 2. Dokažte následující vlastnosti pro $\alpha \in \mathbb{R}$ a A, B, C matice vhodných rozměrů:

- $(A + B)^T = A^T + B^T$,
- $A \cdot I_n = A$,
- $e_i^T A = A_{i*}$,
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$,
- $(AB)^T = B^T A^T$,
- $A(B + C) = AB + AC$,
- matice $A^T A$ je symetrická.

Příklad 3. Napište matici

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

jako součet symetrické ($A = A^T$) a antisymetrické ($B = -B^T$) matice.

Příklad 4. Rozhodněte, zda platí pro čtvercové matice $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

- $AB = 0 \Leftrightarrow (A = 0 \vee B = 0)$,
- $AB = AC \Rightarrow B = C$.

Příklad 5. Spočítejte $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{2019}$.

Příklad 6.

- Bud $a, b \in \mathbb{R}^n$. Určete $\text{rank}(ab^T)$.
- Rozhodněte, zda pro každé $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je $\text{rank}(AB) = \text{rank}(BA)$.
- Rozhodněte, zda existují $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tak, že $\text{rank}(AB) < \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$.

Příklad 1. Spočítejte $A + B$, $2 \cdot A$, $A \cdot B$, $B \cdot C$, $C \cdot B$ a C^T pro matice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 8 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -2 \\ 6 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Příklad 2. Dokažte následující vlastnosti pro $\alpha \in \mathbb{R}$ a A, B, C matice vhodných rozměrů:

- $(A + B)^T = A^T + B^T$,
- $A \cdot I_n = A$,
- $e_i^T A = A_{i*}$,
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$,
- $(AB)^T = B^T A^T$,
- $A(B + C) = AB + AC$,
- matice $A^T A$ je symetrická.

Příklad 3. Napište matici

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

jako součet symetrické ($A = A^T$) a antisymetrické ($B = -B^T$) matice.

Příklad 4. Rozhodněte, zda platí pro čtvercové matice $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

- $AB = 0 \Leftrightarrow (A = 0 \vee B = 0)$,
- $AB = AC \Rightarrow B = C$.

Příklad 5. Spočítejte $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{2019}$.

Příklad 6.

- Bud $a, b \in \mathbb{R}^n$. Určete $\text{rank}(ab^T)$.
- Rozhodněte, zda pro každé $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je $\text{rank}(AB) = \text{rank}(BA)$.
- Rozhodněte, zda existují $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tak, že $\text{rank}(AB) < \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$.