Příklad 1.

a) Buď $a, b \in \mathbb{R}^n$. Určete $\operatorname{rank}(ab^T)$.
b) Rozhodněte, zda pro každé $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je $\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(BA)$.
c) Rozhodněte, zda existují $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tak, že $\operatorname{rank}(AB) < \min\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\}$.

Příklad 2. Uveďte různé podmínky pro regularitu matice. Je matice s jedním nulovým sloupcem (resp. řádkem) regulární nebo singulární?

Příklad 3. Rozhodněte, pro jaké hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ je matice regulární:

$$\begin{pmatrix} 2a+1 & a & 2a \\ a & 1 & a+1 \\ 2a & 0 & 2a \end{pmatrix}.$$

Příklad 4. Převeďte matici A na redukovaný odstupňovaný tvar a zapište $\operatorname{RREF}(A)$ jako násobení A maticemi příslušných elementárních řádkových úprav. Co se stane po vynásobení A elementární maticí zprava?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad 5. Invertujte matice

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{c)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 6. Jak se změní inverzní matice k $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pokud k prvku a_{ij} přičteme $\alpha \in \mathbb{R}$?
Nápověda:

$$(A + bc^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1 + c^T A^{-1} b} A^{-1} b c^T A^{-1}$$

Příklad 1.

a) Buď $a, b \in \mathbb{R}^n$. Určete $\operatorname{rank}(ab^T)$.
b) Rozhodněte, zda pro každé $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je $\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(BA)$.
c) Rozhodněte, zda existují $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tak, že $\operatorname{rank}(AB) < \min\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\}$.

Příklad 2. Uveďte různé podmínky pro regularitu matice. Je matice s jedním nulovým sloupcem (resp. řádkem) regulární nebo singulární?

Příklad 3. Rozhodněte, pro jaké hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ je matice regulární:

$$\begin{pmatrix} 2a+1 & a & 2a \\ a & 1 & a+1 \\ 2a & 0 & 2a \end{pmatrix}.$$

Příklad 4. Převeďte matici A na redukovaný odstupňovaný tvar a zapište $\operatorname{RREF}(A)$ jako násobení A maticemi příslušných elementárních řádkových úprav. Co se stane po vynásobení A elementární maticí zprava?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad 5. Invertujte matice

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{c)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 6. Jak se změní inverzní matice k $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pokud k prvku a_{ij} přičteme $\alpha \in \mathbb{R}$?
Nápověda:

$$(A + bc^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1 + c^T A^{-1} b} A^{-1} b c^T A^{-1}$$