Příklad 1. Rozhodněte, zda je tělesem:

a) $\{-1, 0, 1\}$ s klasickým sčítáním a násobením,
b) $\mathbb{Z}(\sqrt{2}) = \{a + \sqrt{2}b : a, b \in \mathbb{Z}\}$ s klasickým sčítáním a násobením,
c) $\mathbb{Q}(i) = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Q}\}$ s klasickým sčítáním a násobením,
d) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ se sčítáním a násobením po složkách.

Příklad 2. Určete hodnoty $2^{101}, 3^{1001}, 4^{1000001}$ v tělese $\mathbb{Z}_{17}$.

Příklad 3. Řešte soustavy rovnic bez výměny řádků:

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ nad $\mathbb{Z}_2$,
b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$ nad $\mathbb{Z}_2$,
c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right)$ nad $\mathbb{Z}_7$.

Příklad 4. Invertujte matice:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_3$ a $\mathbb{Z}_5$,
b) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_7$ a $\mathbb{Z}_{11}$.

Příklad 5. Určete počet regulárních matic řádu 2 nad tělesem $\mathbb{Z}_p$.

Příklad 6. Rozhodněte, zda tvoří vektorový prostor

a) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{Q}$,
b) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{C}$,
c) $\mathbb{Z}_5^n$ nad $\mathbb{Z}_2$,
d) $U \times V$ nad $\mathbb{T}$, kde U, V jsou vektorové prostory nad $\mathbb{T}$, sčítání a násobení definujeme po složkách.

Příklad 7. Rozhodněte, zda následující množiny tvoří podprostory prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$:

a) $\mathcal{A} = \{(2s, s, |s|) : s \in \mathbb{R}\}$,
b) $\mathcal{B} = \{(s, 5t, 2s - t) : s, t \in \mathbb{R}\}$.

Příklad 1. Rozhodněte, zda je tělesem:

a) $\{-1, 0, 1\}$ s klasickým sčítáním a násobením,
b) $\mathbb{Z}(\sqrt{2}) = \{a + \sqrt{2}b : a, b \in \mathbb{Z}\}$ s klasickým sčítáním a násobením,
c) $\mathbb{Q}(i) = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Q}\}$ s klasickým sčítáním a násobením,
d) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ se sčítáním a násobením po složkách.

Příklad 2. Určete hodnoty $2^{101}, 3^{1001}, 4^{1000001}$ v tělese $\mathbb{Z}_{17}$.

Příklad 3. Řešte soustavy rovnic bez výměny řádků:

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ nad $\mathbb{Z}_2$,
b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$ nad $\mathbb{Z}_2$,
c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right)$ nad $\mathbb{Z}_7$.

Příklad 4. Invertujte matice:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_3$ a $\mathbb{Z}_5$,
b) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_7$ a $\mathbb{Z}_{11}$.

Příklad 5. Určete počet regulárních matic řádu 2 nad tělesem $\mathbb{Z}_p$.

Příklad 6. Rozhodněte, zda tvoří vektorový prostor

a) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{Q}$,
b) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{C}$,
c) $\mathbb{Z}_5^n$ nad $\mathbb{Z}_2$,
d) $U \times V$ nad $\mathbb{T}$, kde U, V jsou vektorové prostory nad $\mathbb{T}$, sčítání a násobení definujeme po složkách.

Příklad 7. Rozhodněte, zda následující množiny tvoří podprostory prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$:

a) $\mathcal{A} = \{(2s, s, |s|) : s \in \mathbb{R}\}$,
b) $\mathcal{B} = \{(s, 5t, 2s - t) : s, t \in \mathbb{R}\}$.