Příklad 1. Nechť u, v, w jsou lineárně nezávislé vektory z prostoru V nad $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda jsou následující vektory lineárně nezávislé:

a) $\{0, u, v\}$,
b) $\{u, 2u, v\}$,
c) $\{u, v + w\}$,
d) $\{u, u + v, u + w\}$.

Příklad 2. Najděte neprázdnou množinu vektorů se složkami z $\{0, 1, 2\}$ tak, aby

a) byly lineárně závislé v $\mathbb{R}^n$ (nad $\mathbb{R}$) i v $\mathbb{Z}_3^n$ (nad $\mathbb{Z}_3$),
b) byly lineárně nezávislé v $\mathbb{R}^n$ i v $\mathbb{Z}_3^n$,
c) byly lineárně nezávislé v $\mathbb{R}^n$, ale závislé v $\mathbb{Z}_3^n$,
d) byly lineárně závislé v $\mathbb{R}^n$, ale nezávislé v $\mathbb{Z}_3^n$.

Příklad 3. Buď $M = \{a, b, c, d, e\}$ a uvažujme vektorový prostor 2^M všech podmnožin množiny M nad tělesem $\mathbb{Z}_2$, kde sčítání je chápáno jako výlučná disjunkce a pro $A \subseteq M$ je násobek množiny definován jako $0A = \emptyset$ a $1A = A$:

a) najděte nulový vektor o,
b) určete opačný vektor $-v$ k vektoru $v = \{a, b, c\}$,
c) vyhodnoťte lineární kombinaci $u + v + (-w) + (-z)$, kde $u = \{a, d\}$, $v = \{b, e\}$, $w = \{c, e\}$, $z = \{a, b, c\}$,
d) rozhodněte, zda vektor $\{a, b, c, d, e\}$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů u, v, w, z.

Příklad 4. Rozhodněte, zda jsou vektory lineárně nezávislé:

a) $\{-x^2, x^2 + x, x^3 - 1\}$ v prostoru $\mathcal{P}^3$ reálných polynomů stupně nejvýše tři,
b) $\{2x - 1, x - 1, 3x\}$ v prostoru reálných funkcí $\mathcal{F}$,
c) $\{\sin x, \cos x\}$ v prostoru reálných funkcí $\mathcal{F}$.

Příklad 5. Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$. Rozhodněte, zda pro libovolné množiny $M, N \subseteq V$ platí následující vlastnosti lineárního obalu:

a) $M \subseteq N \Rightarrow \mathrm{span}(M) \Subset \mathrm{span}(N)$,
b) $M \subseteq N \Leftarrow \mathrm{span}(M) \Subset \mathrm{span}(N)$.

Příklad 6. Najděte příklad vektorového prostoru jehož bázi tvoří on sám.

Příklad 1. Nechť u, v, w jsou lineárně nezávislé vektory z prostoru V nad $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda jsou následující vektory lineárně nezávislé:

a) $\{0, u, v\}$,
b) $\{u, 2u, v\}$,
c) $\{u, v + w\}$,
d) $\{u, u + v, u + w\}$.

Příklad 2. Najděte neprázdnou množinu vektorů se složkami z $\{0, 1, 2\}$ tak, aby

a) byly lineárně závislé v $\mathbb{R}^n$ (nad $\mathbb{R}$) i v $\mathbb{Z}_3^n$ (nad $\mathbb{Z}_3$),
b) byly lineárně nezávislé v $\mathbb{R}^n$ i v $\mathbb{Z}_3^n$,
c) byly lineárně nezávislé v $\mathbb{R}^n$, ale závislé v $\mathbb{Z}_3^n$,
d) byly lineárně závislé v $\mathbb{R}^n$, ale nezávislé v $\mathbb{Z}_3^n$.

Příklad 3. Buď $M = \{a, b, c, d, e\}$ a uvažujme vektorový prostor 2^M všech podmnožin množiny M nad tělesem $\mathbb{Z}_2$, kde sčítání je chápáno jako výlučná disjunkce a pro $A \subseteq M$ je násobek množiny definován jako $0A = \emptyset$ a $1A = A$:

a) najděte nulový vektor o,
b) určete opačný vektor $-v$ k vektoru $v = \{a, b, c\}$,
c) vyhodnoťte lineární kombinaci $u + v + (-w) + (-z)$, kde $u = \{a, d\}$, $v = \{b, e\}$, $w = \{c, e\}$, $z = \{a, b, c\}$,
d) rozhodněte, zda vektor $\{a, b, c, d, e\}$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů u, v, w, z.

Příklad 4. Rozhodněte, zda jsou vektory lineárně nezávislé:

a) $\{-x^2, x^2 + x, x^3 - 1\}$ v prostoru $\mathcal{P}^3$ reálných polynomů stupně nejvýše tři,
b) $\{2x - 1, x - 1, 3x\}$ v prostoru reálných funkcí $\mathcal{F}$,
c) $\{\sin x, \cos x\}$ v prostoru reálných funkcí $\mathcal{F}$.

Příklad 5. Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$. Rozhodněte, zda pro libovolné množiny $M, N \subseteq V$ platí následující vlastnosti lineárního obalu:

a) $M \subseteq N \Rightarrow \operatorname{span}(M) \Subset \operatorname{span}(N)$,
b) $M \subseteq N \Leftarrow \operatorname{span}(M) \Subset \operatorname{span}(N)$.

Příklad 6. Najděte příklad vektorového prostoru jehož bázi tvoří on sám.