Příklad 1. Spočítejte $A+B$, $2\cdot A$, $A\cdot B$, $B\cdot C$, $C\cdot B$ a C^T pro matice

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 8 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 8 & -2 \\ 6 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad C=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Příklad 2. Dokažte následující vlastnosti pro $\alpha\in\mathbb{R}$ a A,B,C matice vhodných rozměrů:

a) $(A+B)^T = A^T + B^T$,
b) $A\cdot I_n = A$,
c) $e_i^T A = A_{i*}$,
d) $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$,
e) $(AB)^T = B^T A^T$,
f) $A(B+C) = AB + AC$,
g) matice $A^T A$ je symetrická.

Příklad 3. Napište matici

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

jako součet symetrické ($A=A^T$) a antisymetrické ($A=-A^T$) matice.

Příklad 4. Rozhodněte, zda platí pro čtvercové matice $A,B,C\in\mathbb{R}^{n\times n}$:

a) $AB=0 \;\Leftrightarrow\; (A=0 \vee B=0)$,
b) $AB=AC \;\Rightarrow\; B=C$.

Příklad 5. Spočítejte $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{2018}$.

Příklad 6.

a) Buď $a,b\in\mathbb{R}^n$. Určete $\operatorname{rank}(ab^T)$.
b) Rozhodněte, zda pro každé $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ je $\operatorname{rank}(AB)=\operatorname{rank}(BA)$.
c) Rozhodněte, zda existují $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ tak, že $\operatorname{rank}(AB) < \min\{\operatorname{rank}(A),\operatorname{rank}(B)\}$.

Příklad 1. Spočítejte $A+B$, $2\cdot A$, $A\cdot B$, $B\cdot C$, $C\cdot B$ a C^T pro matice

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 8 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 8 & -2 \\ 6 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad C=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Příklad 2. Dokažte následující vlastnosti pro $\alpha \in \mathbb{R}$ a A, B, C matice vhodných rozměrů:

a) $(A+B)^T = A^T + B^T$,
b) $A \cdot I_n = A$,
c) $e_i^T A = A_{i*}$,
d) $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$,
e) $(AB)^T = B^T A^T$,
f) $A(B+C) = AB + AC$,
g) matice $A^T A$ je symetrická.

Příklad 3. Napište matici

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

jako součet symetrické ($A = A^T$) a antisymetrické ($A = -A^T$) matice.

Příklad 4. Rozhodněte, zda platí pro čtvercové matice $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

a) $AB = 0 \Leftrightarrow (A = 0 \vee B = 0)$,
b) $AB = AC \Rightarrow B = C$.

Příklad 5. Spočítejte $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{2018}$.

Příklad 6.

a) Buď $a, b \in \mathbb{R}^n$. Určete $\operatorname{rank}(ab^T)$.
b) Rozhodněte, zda pro každé $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je $\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(BA)$.
c) Rozhodněte, zda existují $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tak, že $\operatorname{rank}(AB) < \min\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\}$.