Příklad 1. Jak se změní inverzní matice k $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pokud k prvku a_{ij} přičteme $\alpha \in \mathbb{R}$?
Nápověda:

$$(A + bc^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1 + c^T A^{-1} b} A^{-1} b c^T A^{-1}$$

Příklad 2. Invertujte matici

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad 3. Rozhodněte, zda je podgrupou:

a) $(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, +) \leq (\mathbb{R}, +)$,
b) $(\mathbb{Q}^+, \cdot) \leq (\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot)$, kde $\mathbb{Q}^+ = \{q \in \mathbb{Q} : q > 0\}$,
c) (sudá celá čísla, $+$) $\leq (\mathbb{Z}, +)$,
d) (lichá celá čísla, $+$) $\leq (\mathbb{Z}, +)$.

Příklad 4. Buďte $(H_1, \circ)$ a $(H_2, \circ)$ podgrupy grupy $(G, \circ)$. Ukažte, že $(H_1 \cap H_2, \circ)$ je také podgrupa $(G, \circ)$.

Příklad 5. Rozhodněte, zda je tělesem:

a) $\{-1, 0, 1\}$ s klasickým sčítáním a násobením,
b) $\mathbb{Z}(\sqrt{2}) = \{a + \sqrt{2}b : a, b \in \mathbb{Z}\}$ s klasickým sčítáním a násobením,
c) $\mathbb{Q}(i) = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Q}\}$ s klasickým sčítáním a násobením,
d) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ se sčítáním a násobením po složkách.

Příklad 6. Spočítejte v $\mathbb{Z}_5$ hodnoty $3 + 4$, -3, $4 \cdot 3$, 3^{-1}, $4/3$.

Příklad 7. Určete hodnoty $2^{101}, 3^{1001}, 4^{1000001}$ v tělese $\mathbb{Z}_{17}$.

Příklad 1. Jak se změní inverzní matice k $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pokud k prvku a_{ij} přičteme $\alpha \in \mathbb{R}$?
Nápověda:

$$(A + bc^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1 + c^T A^{-1} b} A^{-1} b c^T A^{-1}$$

Příklad 2. Invertujte matici

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad 3. Rozhodněte, zda je podgrupou:

a) $(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, +) \leq (\mathbb{R}, +)$,
b) $(\mathbb{Q}^+, \cdot) \leq (\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot)$, kde $\mathbb{Q}^+ = \{q \in \mathbb{Q} : q > 0\}$,
c) (sudá celá čísla, $+$) $\leq (\mathbb{Z}, +)$,
d) (lichá celá čísla, $+$) $\leq (\mathbb{Z}, +)$.

Příklad 4. Buďte $(H_1, \circ)$ a $(H_2, \circ)$ podgrupy grupy $(G, \circ)$. Ukažte, že $(H_1 \cap H_2, \circ)$ je také podgrupa $(G, \circ)$.

Příklad 5. Rozhodněte, zda je tělesem:

a) $\{-1, 0, 1\}$ s klasickým sčítáním a násobením,
b) $\mathbb{Z}(\sqrt{2}) = \{a + \sqrt{2}b : a, b \in \mathbb{Z}\}$ s klasickým sčítáním a násobením,
c) $\mathbb{Q}(i) = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Q}\}$ s klasickým sčítáním a násobením,
d) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ se sčítáním a násobením po složkách.

Příklad 6. Spočítejte v $\mathbb{Z}_5$ hodnoty $3 + 4$, -3, $4 \cdot 3$, 3^{-1}, $4/3$.

Příklad 7. Určete hodnoty $2^{101}, 3^{1001}, 4^{1000001}$ v tělese $\mathbb{Z}_{17}$.