

Příklad 1. Určete hodnoty 2^{101} , 3^{1001} , $4^{1000001}$ v tělese \mathbb{Z}_{17} .

Příklad 2. Řešte soustavy rovnic bez výměny řádků:

$$\text{a) } \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \text{ nad } \mathbb{Z}_2, \quad \text{b) } \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{array} \right) \text{ nad } \mathbb{Z}_7.$$

Příklad 3. Invertujte matice:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_3 \text{ a } \mathbb{Z}_5, \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_7 \text{ a } \mathbb{Z}_{11}.$$

Příklad 4. Určete počet regulárních matic řádu 2 nad tělesem \mathbb{Z}_p .

Příklad 5. Najděte matici A , která nad tělesem \mathbb{Z}_5 splňuje rovnost

$$A \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Příklad 6. Rozhodněte, zda tvoří vektorový prostor

- \mathbb{R}^n nad \mathbb{Q} ,
- \mathbb{R}^n nad \mathbb{C} ,
- \mathbb{Z}_5^n nad \mathbb{Z}_2 ,
- $U \times V$ nad \mathbb{T} , kde U, V jsou vektorové prostory nad \mathbb{T} , sčítání a násobení definujeme po složkách.

Příklad 7. Rozhodněte, zda následující množiny tvoří podprostory prostoru \mathbb{R}^3 nad \mathbb{R} :

- $\mathcal{A} = \{(2s, s, |s|) : s \in \mathbb{R}\}$,
- $\mathcal{B} = \{(s, 5t, 2s - t) : s, t \in \mathbb{R}\}$.

Příklad 1. Určete hodnoty 2^{101} , 3^{1001} , $4^{1000001}$ v tělese \mathbb{Z}_{17} .

Příklad 2. Řešte soustavy rovnic bez výměny řádků:

$$\text{a) } \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \text{ nad } \mathbb{Z}_2, \quad \text{b) } \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{array} \right) \text{ nad } \mathbb{Z}_7.$$

Příklad 3. Invertujte matice:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_3 \text{ a } \mathbb{Z}_5, \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_7 \text{ a } \mathbb{Z}_{11}.$$

Příklad 4. Určete počet regulárních matic řádu 2 nad tělesem \mathbb{Z}_p .

Příklad 5. Najděte matici A , která nad tělesem \mathbb{Z}_5 splňuje rovnost

$$A \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Příklad 6. Rozhodněte, zda tvoří vektorový prostor

- \mathbb{R}^n nad \mathbb{Q} ,
- \mathbb{R}^n nad \mathbb{C} ,
- \mathbb{Z}_5^n nad \mathbb{Z}_2 ,
- $U \times V$ nad \mathbb{T} , kde U, V jsou vektorové prostory nad \mathbb{T} , sčítání a násobení definujeme po složkách.

Příklad 7. Rozhodněte, zda následující množiny tvoří podprostory prostoru \mathbb{R}^3 nad \mathbb{R} :

- $\mathcal{A} = \{(2s, s, |s|) : s \in \mathbb{R}\}$,
- $\mathcal{B} = \{(s, 5t, 2s - t) : s, t \in \mathbb{R}\}$.