Příklad 1. Rozhodněte, zda tvoří vektorový prostor

a) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{Q}$,
b) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{C}$,
c) $\mathbb{Z}_5^n$ nad $\mathbb{Z}_2$,
d) $U \times V$ nad $\mathbb{T}$, kde U, V jsou vektorové prostory nad $\mathbb{T}$, sčítání a násobení definujeme po složkách.

Příklad 2. Rozhodněte, zda následující množiny tvoří podprostory prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$:

a) $\mathcal{A} = \{(2s, s, |s|) : s \in \mathbb{R}\}$,
b) $\mathcal{B} = \{(s, 5t, 2s - t) : s, t \in \mathbb{R}\}$.

Příklad 3. Rozhodněte, zda následující tvoří podprostor prostoru reálných posloupností $\mathbb{R}^\infty$:

a) posloupnosti tvaru $(a, b, c, a, b, c, a, b, c, \dots)$ pro $a, b, c \in \mathbb{R}$,
b) posloupnosti s nekonečně mnoha nulovými prvky,
c) posloupnosti s konečně mnoha nenulovými prvky,
d) neklesající posloupnosti,
e) aritmetické posloupnosti ($x_i - x_{i-1}$ je konstantní).

Příklad 4. Definujte lineární kombinaci a rozhodněte, zda

a) vektor $(4, -1, 1)$ náleží do lineárního obalu vektorů $(2, 1, 1)$ a $(1, 2, 1)$,
b) vektory $(1, 1, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)$ generují $\mathbb{R}^4$, resp. $\mathbb{Z}_2^4$.

Příklad 5. Nechť u, v, w jsou lineárně nezávislé vektory z prostoru V nad $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda jsou následující vektory lineárně nezávislé:

a) $\{0, u, v\}$,
b) $\{u, 2u, v\}$,
c) $\{u, v + w\}$,
d) $\{u, u + v, u + w\}$.

Příklad 6. Najděte neprázdnou množinu vektorů se složkami z $\{0, 1, 2\}$ tak, aby

a) byly lineárně závislé v $\mathbb{R}^n$ (nad $\mathbb{R}$) i v $\mathbb{Z}_3^n$ (nad $\mathbb{Z}_3$),
b) byly lineárně nezávislé v $\mathbb{R}^n$ i v $\mathbb{Z}_3^n$,
c) byly lineárně nezávislé v $\mathbb{R}^n$, ale závislé v $\mathbb{Z}_3^n$,
d) byly lineárně závislé v $\mathbb{R}^n$, ale nezávislé v $\mathbb{Z}_3^n$.

Příklad 1. Rozhodněte, zda tvoří vektorový prostor

a) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{Q}$,
b) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{C}$,
c) $\mathbb{Z}_5^n$ nad $\mathbb{Z}_2$,
d) $U \times V$ nad $\mathbb{T}$, kde U, V jsou vektorové prostory nad $\mathbb{T}$, sčítání a násobení definujeme po složkách.

Příklad 2. Rozhodněte, zda následující množiny tvoří podprostory prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$:

a) $\mathcal{A} = \{(2s, s, |s|) : s \in \mathbb{R}\}$,
b) $\mathcal{B} = \{(s, 5t, 2s - t) : s, t \in \mathbb{R}\}$.

Příklad 3. Rozhodněte, zda následující tvoří podprostor prostoru reálných posloupností $\mathbb{R}^\infty$:

a) posloupnosti tvaru $(a, b, c, a, b, c, a, b, c, \dots)$ pro $a, b, c \in \mathbb{R}$,
b) posloupnosti s nekonečně mnoha nulovými prvky,
c) posloupnosti s konečně mnoha nenulovými prvky,
d) neklesající posloupnosti,
e) aritmetické posloupnosti ($x_i - x_{i-1}$ je konstantní).

Příklad 4. Definujte lineární kombinaci a rozhodněte, zda

a) vektor $(4, -1, 1)$ náleží do lineárního obalu vektorů $(2, 1, 1)$ a $(1, 2, 1)$,
b) vektory $(1, 1, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)$ generují $\mathbb{R}^4$, resp. $\mathbb{Z}_2^4$.

Příklad 5. Nechť u, v, w jsou lineárně nezávislé vektory z prostoru V nad $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda jsou následující vektory lineárně nezávislé:

a) $\{0, u, v\}$,
b) $\{u, 2u, v\}$,
c) $\{u, v + w\}$,
d) $\{u, u + v, u + w\}$.

Příklad 6. Najděte neprázdnou množinu vektorů se složkami z $\{0, 1, 2\}$ tak, aby

a) byly lineárně závislé v $\mathbb{R}^n$ (nad $\mathbb{R}$) i v $\mathbb{Z}_3^n$ (nad $\mathbb{Z}_3$),
b) byly lineárně nezávislé v $\mathbb{R}^n$ i v $\mathbb{Z}_3^n$,
c) byly lineárně nezávislé v $\mathbb{R}^n$, ale závislé v $\mathbb{Z}_3^n$,
d) byly lineárně závislé v $\mathbb{R}^n$, ale nezávislé v $\mathbb{Z}_3^n$.