

Příklad 1. Necht u, v, w jsou lineárně nezávislé vektory z prostoru V nad \mathbb{R} . Rozhodněte, zda jsou následující vektory lineárně nezávislé:

- a) $\{0, u, v\}$,
- b) $\{u, 2u, v\}$,
- c) $\{u, v + w\}$,
- d) $\{u, u + v, u + w\}$.

Příklad 2. Najděte neprázdnou množinu vektorů se složkami z $\{0, 1, 2\}$ tak, aby

- a) byly lineárně závislé v \mathbb{R}^n (nad \mathbb{R}) i v \mathbb{Z}_3^n (nad \mathbb{Z}_3),
- b) byly lineárně nezávislé v \mathbb{R}^n i v \mathbb{Z}_3^n ,
- c) byly lineárně nezávislé v \mathbb{R}^n , ale závislé v \mathbb{Z}_3^n ,
- d) byly lineárně závislé v \mathbb{R}^n , ale nezávislé v \mathbb{Z}_3^n .

Příklad 3. Buď $M = \{a, b, c, d, e\}$ a uvažujme vektorový prostor 2^M všech podmnožin množiny M nad tělesem \mathbb{Z}_2 , kde sčítání je chápáno jako výlučná disjunkce a pro $A \subseteq M$ je násobek množiny definován jako $0A = \emptyset$ a $1A = A$:

- a) najděte nulový vektor o ,
- b) určete opačný vektor $-v$ k vektoru $v = \{a, b, c\}$,
- c) vyhodnoťte lineární kombinaci $u + v - w - z$, kde $u = \{a, d\}$, $v = \{b, e\}$, $w = \{c, e\}$, $z = \{a, b, c\}$,
- d) rozhodněte, zda vektor $\{a, b, c, d, e\}$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů u, v, w, z .

Příklad 4. Rozhodněte, zda jsou vektory lineárně nezávislé:

- a) $\{(1, 3, 2), (2, 5, 3), (2, 3, 1)\}$ v prostoru \mathbb{R}^3 ,
- b) $\{-x^2, x^2 + x, x^3 - 1\}$ v prostoru \mathcal{P}^3 reálných polynomů stupně nejvýše tři,
- c) $\{2x - 1, x - 1, 3x\}$ v prostoru reálných funkcí \mathcal{F} ,
- d) $\{\sin x, \cos x\}$ v prostoru reálných funkcí \mathcal{F} .

Příklad 5. Buď V vektorový prostor nad \mathbb{T} . Rozhodněte, zda pro libovolné množiny $M, N \subseteq V$ platí následující vlastnosti lineárního obalu:

- a) $M \subseteq N \Rightarrow \text{span}(M) \subseteq \text{span}(N)$,
- b) $M \subseteq N \Leftarrow \text{span}(M) \subseteq \text{span}(N)$.

Příklad 6. Najděte příklad vektorového prostoru jehož bázi tvoří on sám.

Příklad 1. Necht u, v, w jsou lineárně nezávislé vektory z prostoru V nad \mathbb{R} . Rozhodněte, zda jsou následující vektory lineárně nezávislé:

- a) $\{0, u, v\}$,
- b) $\{u, 2u, v\}$,
- c) $\{u, v + w\}$,
- d) $\{u, u + v, u + w\}$.

Příklad 2. Najděte neprázdnou množinu vektorů se složkami z $\{0, 1, 2\}$ tak, aby

- a) byly lineárně závislé v \mathbb{R}^n (nad \mathbb{R}) i v \mathbb{Z}_3^n (nad \mathbb{Z}_3),
- b) byly lineárně nezávislé v \mathbb{R}^n i v \mathbb{Z}_3^n ,
- c) byly lineárně nezávislé v \mathbb{R}^n , ale závislé v \mathbb{Z}_3^n ,
- d) byly lineárně závislé v \mathbb{R}^n , ale nezávislé v \mathbb{Z}_3^n .

Příklad 3. Buď $M = \{a, b, c, d, e\}$ a uvažujme vektorový prostor 2^M všech podmnožin množiny M nad tělesem \mathbb{Z}_2 , kde sčítání je chápáno jako výlučná disjunkce a pro $A \subseteq M$ je násobek množiny definován jako $0A = \emptyset$ a $1A = A$:

- a) najděte nulový vektor o ,
- b) určete opačný vektor $-v$ k vektoru $v = \{a, b, c\}$,
- c) vyhodnoťte lineární kombinaci $u + v - w - z$, kde $u = \{a, d\}$, $v = \{b, e\}$, $w = \{c, e\}$, $z = \{a, b, c\}$,
- d) rozhodněte, zda vektor $\{a, b, c, d, e\}$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů u, v, w, z .

Příklad 4. Rozhodněte, zda jsou vektory lineárně nezávislé:

- a) $\{(1, 3, 2), (2, 5, 3), (2, 3, 1)\}$ v prostoru \mathbb{R}^3 ,
- b) $\{-x^2, x^2 + x, x^3 - 1\}$ v prostoru \mathcal{P}^3 reálných polynomů stupně nejvýše tři,
- c) $\{2x - 1, x - 1, 3x\}$ v prostoru reálných funkcí \mathcal{F} ,
- d) $\{\sin x, \cos x\}$ v prostoru reálných funkcí \mathcal{F} .

Příklad 5. Buď V vektorový prostor nad \mathbb{T} . Rozhodněte, zda pro libovolné množiny $M, N \subseteq V$ platí následující vlastnosti lineárního obalu:

- a) $M \subseteq N \Rightarrow \text{span}(M) \subseteq \text{span}(N)$,
- b) $M \subseteq N \Leftarrow \text{span}(M) \subseteq \text{span}(N)$.

Příklad 6. Najděte příklad vektorového prostoru jehož bázi tvoří on sám.