Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2020/2021): (2) Soustavy lineárních rovnic

Cv. 1. Zapište rozšířenou matici soustavy

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 6, \\ -3x_1 + x_2 &= 2, \end{aligned}$$

a vyřešte soustavu Gaussovou–Jordanovou eliminací. Znázorněte řešení soustavy graficky jako průsečík přímek (řádkový pohled) a jako součet vektorů (sloupcový pohled).

Řešení:

Rozšířená matice soustavy je

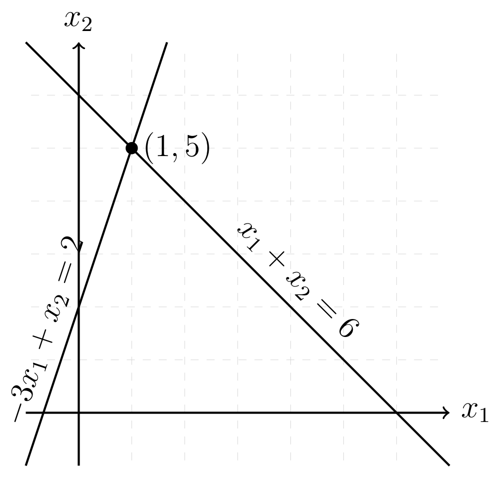
$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 6 \\ -3 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

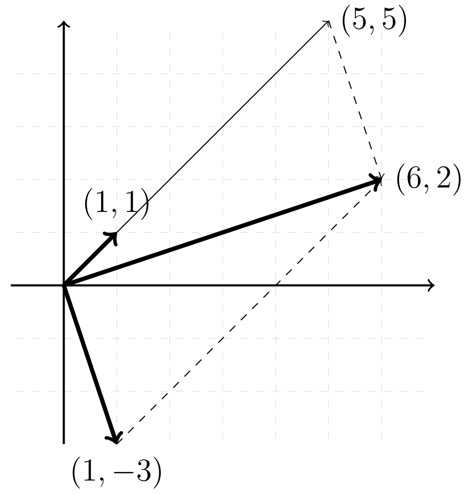
Aplikací elementárních řádkových úprav snadno nalezneme řešení $(x_1, x_2) = (1, 5)$:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 6 \\ -3 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

Rovnice $x_1 + x_2 = 6$ a $-3x_1 + x_2 = 2$ popisují dvě přímky v rovině, řešení soustavy $(1, 5)$ je jejich průsečíkem.

Sloupce rozšířené matice soustavy můžeme zakreslit jako vektory v rovině. Řešení soustavy pak říká, že vektor $(6, 2)$ dostaneme sečtením (1-krát prodlouženého) vektoru $(1, -3)$ a 5-krát prodlouženého vektoru $(1, 1)$.





Cv. 2. Vyřešte Gaussovou nebo Gaussovou–Jordanovou eliminací následující soustavy rovnic a určete hodnost matic:

(a) $\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{array}\right)$, (b) $\left(\begin{array}{rrr|r} 5 & -3 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right)$, (c) $\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 7 \end{array}\right)$.

Řešení:

(a) Aplikací elementárních řádkových úprav převedeme rozšířenou matici soustavy do odstupňovaného tvaru:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 5 & -10 & -10 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -20 & -30 \end{array}\right).$$

Zpětnou substitucí získáme jediné řešení soustavy $(x_1, x_2, x_3) = (-\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})$.
Alternativně můžeme také použít Gaussovu–Jordanovu eliminaci a převést matici do redukovaného odstupňovaného tvaru

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array}\right).$$

Hodnost matice je daná počtem nenulových řádků (počtem pivotů) odstupňovaného tvaru. V tomto případě platí $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A \mid b) = 3$.

(b) Opět upravíme matici pomocí elementárních řádkových úprav:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 5 & -3 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 1 & -13 \\ 0 & 7 & 1 & -7 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 1 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

Poslední řádek upravené matice reprezentuje rovnici $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 5$, soustava tedy nemá řešení.
Vidíme, že se v posledním sloupci upravené matice nachází pivot a hodnost rozšířené matice soustavy je $\operatorname{rank}(A \mid b) = 3$, zatímco $\operatorname{rank}(A) = 2$.

(c) Aplikací elementárních úprav převedeme matici na tvar:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Nyní můžeme použít zpětnou substituci, nebo dále upravit matici až na redukovaný odstupňovaný tvar

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Z posledního řádku upravené matice dostaneme $x_4 = 0$. Z druhého řádku můžeme vyjádřit $x_2 = 3 - 2x_3$, přičemž volnou proměnnou x_3 ponecháme jako parametr. Nakonec z prvního řádku dostaneme $x_1 = 1 + x_3$. Soustava má tedy nekonečně mnoho řešení ve tvaru

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1 + x_3, 3 - 2x_3, x_3, 0) = (1, 3, 0, 0) + x_3 \cdot (1, -2, 1, 0).$$

V tomto případě opět platí $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A \mid b) = 3$, ale zároveň je $\operatorname{rank}(A)$ menší než počet proměnných.

Cv. 3. Kolik existuje různých odstupňovaných tvarů pro matice 3×4 (bez ohledu na konkrétní hodnoty prvků)? A kolik pro matice $n \times n$?

Řešení:
Různé odstupňované tvary se odlišují počtem a pozicí pivotů. Matice 3×4 v odstupňovaném tvaru může mít 0 až 3 pivoty (v každém řádku a sloupci nanejvýš 1). Pro matici hodnosti r se pivoty vždy nachází postupně v prvních r řádcích odstupňovaného tvaru, stačí proto uvažovat umístění pivotů do různých sloupců. Pro matici 3×4 můžeme najít následujících 15 různých odstupňovaných tvarů:

- jeden odstupňovaný tvar s 0 pivoty (nulová matice):

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

- 4 odstupňované tvary s 1 pivotem:

$$\begin{pmatrix} \bullet&\_&\_&\_ \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&\bullet&\_&\_ \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&\bullet&\_ \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&\bullet \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

- 6 odstupňovaných tvarů se 2 pivoty:

$$\begin{pmatrix} \bullet&\_&\_&\_ \\ 0&\bullet&\_&\_ \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bullet&\_&\_&\_ \\ 0&0&\bullet&\_ \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bullet&\_&\_&\_ \\ 0&0&0&\bullet \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&\bullet&\_&\_ \\ 0&0&\bullet&\_ \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&\bullet&\_&\_ \\ 0&0&0&\bullet \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&\bullet&\_ \\ 0&0&0&\bullet \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

- 4 odstupňované tvary se 3 pivoty:

$$\begin{pmatrix} \bullet&\_&\_&\_ \\ 0&\bullet&\_&\_ \\ 0&0&\bullet&\_ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bullet&\_&\_&\_ \\ 0&\bullet&\_&\_ \\ 0&0&0&\bullet \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bullet&\_&\_&\_ \\ 0&0&\bullet&\_ \\ 0&0&0&\bullet \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&\bullet&\_&\_ \\ 0&0&\bullet&\_ \\ 0&0&0&\bullet \end{pmatrix}.$$

Obecně, matice $n \times n$ může mít 0 až n pivotů, v každém z n sloupců se pivot buď nachází (v prvním řádku, který je dosud bez pivota), nebo nenachází, dostaneme tedy 2^n možných různých odstupňovaných tvarů. Alternativně, pro $k \in \{0, \dots, n\}$ pivotů máme $\binom{n}{k}$ možných rozmístění do n sloupců, t.j. celkem $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ odstupňovaných tvarů.

Cv. 4. Vyřešte soustavu lineárních rovnic s různými pravými stranami:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & -5 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -9 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -15 \end{pmatrix}.$$

Řešení:
Jelikož lze pro všechny tři soustavy použít Gaussovu eliminaci se stejnou sérií elementárních řádkových úprav, můžeme uvažovat všechny tři pravé strany najednou a aplikovat eliminaci na matici

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -3 & -1 & -9 & 1 \\ 1 & -5 & 4 & 1 & 13 & 5 \\ -3 & 1 & 2 & -3 & 3 & -15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 4 & 1 & 13 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & -9 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & -3 & 3 & -15 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 4 & 1 & 13 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & -9 & 1 \\ 0 & -14 & 14 & 0 & 42 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 4 & 1 & 13 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -7 & -21 & 7 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 4 & 1 & 13 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

Řešením soustavy je tedy vektor $x = (2, 1, 1)$ pro pravou stranu b_1, vektor $x = (1, 0, 3)$ pro b_2 a vektor $x = (4, -1, -1)$ pro b_3.

Cv. 5. Vyřešte soustavu lineárních rovnic s parametrem $a \in \mathbb{R}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right).$$

Řešení:
Pomocí Gaussovy eliminace převedeme matici na odstupňovaný tvar:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2 & 1-a \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & 2-a-a^2 & 1-a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-2a-a^2 & 1-a \end{array}\right)$$

Z posledního řádku upravené matice dostaneme rovnici $(a+3)(1-a)x_4 = 1-a$, tedy $x_4 = \frac{1}{a+3}$ pro $a \notin \{-3, 1\}$. Zpětnou substitucí pak dopočítáme řešení

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{1}{a+3}, \frac{1}{a+3}, \frac{1}{a+3}, \frac{1}{a+3}\right).$$

Pro $a = -3$ dostaneme rovnici $0x_4 = 4$, soustava tudíž nemá řešení.

Pro $a = 1$ má soustava nekonečně mnoho řešení popsaných rovnicí $x_1+x_2+x_3+x_4 = 1$, tedy ve tvaru $(1 - x_2 - x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4)$ pro $x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$.

Cv. 6. Najděte soustavu 3 lineárních rovnic o 4 proměnných s řešením

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 1, 0) + x_2 \cdot (-2, 1, 0, 0) + x_4 \cdot (-3, 0, 2, 1), \text{ kde } x_2, x_4 \in \mathbb{R}.$$

Řešení:
Hledáme soustavu lineárních rovnic s řešením

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (1,0,1,0) + x_2 \cdot (-2,1,0,0) + x_4 \cdot (-3,0,2,1)\\ &= (1-2x_2-3x_4, x_2, 1+2x_4, x_4).\end{aligned}$$

Můžeme tedy vytvořit soustavu obsahující rovnice $x_1 = 1-2x_2-3x_4$ a $x_3 = 1+2x_4$ a třetí rovnici, která množinu řešení dál neomezí, např.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2\end{array}\right), \quad \dots$$

Cv. 7. Vyřešte soustavu lineárních rovnic $n \times n$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 1\\ -1 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots\\ -1 & \dots & -1 & 1 & 1\end{array}\right).$$

Řešení:
Postupně přičteme ke každému řádku (od 2. řádku po n-tý) všechny řádky nad ním:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 1\\ -1 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots\\ -1 & \dots & -1 & 1 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 1\\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & 2\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots\\ -1 & \dots & -1 & 1 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 1\\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & 2\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2^{n-1}\end{array}\right).$$

Tím převedeme matici soustavy na jednotkovou matici a na pravé straně dostaneme řešení $x = (1, 2, 4, \dots, 2^{n-1})$.