Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2020/2021): (3) Operace s maticemi

Cv. 1. Spočtěte $(-1)A + 2BC$, kde A, B, C jsou následující matice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
(-1)\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} & \\
&= \begin{pmatrix} (-1)\cdot 3 & (-1)\cdot 1 \\ (-1)\cdot 4 & (-1)\cdot 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 5\cdot 1 + 9\cdot 2 & 5\cdot(-1) + 9\cdot 2 \\ 2\cdot 1 + 7\cdot 2 & 2\cdot(-1) + 7\cdot 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 23 & 13 \\ 16 & 12 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\cdot 23 & 2\cdot 13 \\ 2\cdot 16 & 2\cdot 12 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 46 & 26 \\ 32 & 24 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3+46 & -1+26 \\ -4+32 & -1+24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 & 25 \\ 28 & 23 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Cv. 2. Vyřešte soustavy rovnic a proveďte zkoušku pomocí násobení matic.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ a $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ a $c = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Řešení:

Řešením první soustavy rovnic $Ax = b$ je vektor $x = (1, 0)^T$. Výsledek ověříme zkouškou

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 3\cdot 0 \\ 1\cdot 1 + 2\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Řešením druhé soustavy rovnic $By = c$ je vektor $y = (-1-t, t, 2)^T$, kde $t \in \mathbb{R}$. Výsledek ověříme zkouškou:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1-t \\ t \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-1-t) + 1\cdot t + 2\cdot 2 \\ 1\cdot(-1-t) + 1\cdot t + 1\cdot 2 \\ 2\cdot(-1-t) + 2\cdot t + 0\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Cv. 3. Vyjádřete elementární řádkové úpravy pomocí násobení matic.

Řešení:

(a) Vynásobení i-tého řádku skalárem $\alpha \neq 0$. Můžeme zapsat pomocí matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy vezmeme matici identity a na pozici i, i zaměníme 1 za α. Násobením touto maticí **zleva** násobíme i-tý řádek konstantou α.

To můžeme ověřit z definice násobení. Nechť D je libovolná matice řádu $m \times n$ a A je matice popsaná výše, řádu $m \times m$. Potom AD je také matice řádu $m \times n$ a pro libovolný řádek $j \in [m]$ a sloupec $k \in [n]$ platí:

$$\begin{aligned} [AD]_{j,k} &= \sum_l A_{j,l} D_{l,k} \\ &= A_{j,j} D_{j,k} && (A_{j,l} \neq 0 \text{ pouze pro } l = j) \\ &= \begin{cases} D_{j,k} & \text{pro } j \neq i \\ \alpha D_{j,k} & \text{pro } j = i \end{cases} && (\text{dosadíme za } A_{j,j}) \end{aligned}$$

Vidíme, že AD má všechny řádky kromě i-tého shodné s maticí D a i-tý řádek je vynásoben skalárem α.

(b) Prohození i-tého a j-tého řádku. Můžeme zapsat pomocí matice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy vezmeme matici identity a prohodíme její i-tý a j-tý řádek. Násobením touto maticí **zleva** prohazujeme i-tý a j-tý řádek.

Ověření zase provedeme z definice násobení. Nechť D je libovolná matice řádu $m \times n$ a B je matice popsaná výše, řádu $m \times m$. Potom BD je také matice řádu $m \times n$ a pro libovolný řádek $k \in [m]$ a sloupec $l \in [n]$ platí:

$$
\begin{aligned}
[BD]_{k,l} &= \sum_{\ell'} B_{k,\ell'} D_{\ell',l} \\
&= \begin{cases} B_{k,k} D_{k,l} & \text{pro } k \neq i, j \\ B_{k,i} D_{i,l} & \text{pro } k = j \\ B_{k,j} D_{j,l} & \text{pro } k = i \end{cases} \qquad \text{(pro ostatní hodnoty } \ell' \text{ je } B_{k,\ell'} = 0) \\
&= \begin{cases} D_{k,l} & \text{pro } k \neq i, j \\ D_{i,l} & \text{pro } k = j \\ D_{j,l} & \text{pro } k = i \end{cases} \qquad \text{(dosadíme příslušné hodnoty z matice } B)
\end{aligned}
$$

Vidíme, že BD má všechny řádky kromě i-tého a j-tého shodné s maticí D a i-tý a j-tý řádek jsou prohozeny.

(c) Přičtení α-násobku i-tého řádku k j-tému řádku, kde $i \neq j$. Můžeme zapsat pomocí matice

$$
C = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix}.
$$

Tedy vezmeme matici identity a na pozici i, j zaměníme nulu za α. Násobením touto maticí **zleva** přičítáme α-násobek j-tého řádku k i-tému.

Ověření provedeme z definice násobení matic. Nechť D je libovolná matice řádu $m \times n$ a C je matice popsaná výše, řádu $m \times m$. Potom CD je také matice řádu $m \times n$ a pro libovolný řádek $k \in [m]$ a sloupec $l \in [n]$ platí:

$$
\begin{aligned}
[CD]_{k,l} &= \sum_{\ell'} C_{k,\ell'} D_{\ell',l} \\
&= \begin{cases} C_{k,k} D_{k,l} & \text{pro } k \neq i \\ C_{k,k} D_{k,l} + C_{k,j} D_{j,l} & \text{pro } k = i \end{cases} \\
&\qquad \text{(pro ostatní hodnoty } m \text{ je } C_{k,\ell'} = 0) \\
&= \begin{cases} D_{k,l} & \text{pro } k \neq i \\ D_{k,l} + \alpha D_{j,l} & \text{pro } k = i \end{cases} \\
&\qquad \text{(dosadíme příslušné hodnoty z matice } C)
\end{aligned}
$$

Vidíme, že všechny řádky kromě i-tého zůstaly zachovány a k i-tému řádku jsme přičetli α násobek j-tého řádku.

Cv. 4. Dokažte, anebo vyvraťte, zdali pro matice A, B, C a $\mathbf{0}$ stejného řádu a reálná čísla α, β platí:

(a) $A+(B+C)=(A+B)+C$
(b) $A+B=B+A$
(c) $A+\mathbf{0}=A$
(d) $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$
(e) $\alpha(\beta A)=\beta(\alpha A)$
(f) $A+(-1)A=\mathbf{0}$
(g) $1A=A$
(h) $A(B+C)=AB+AC$
(i) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$
(j) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$
(k) $\alpha A+\beta B=(\alpha+\beta)(A+B)$
(l) $(A^T)^T=A$
(m) A^TA je symetrická
(n) $(A+B)^T=A^T+B^T$
(o) $(\alpha A)^T=\alpha(A^T)$
(p) $AI_n=A$

Řešení:

(a) Tvrzení platí.

Prvně ukážeme, že levá i pravá strana dávají smysl a mají stejné rozměry. Matice A, B, C jsou všechny stejného řádu, označíme si jejich rozměry jako $m \times n$. Pak na levé straně sčítáme $B+C$, což jsou obě matice řádu $m \times n$ a dostáváme novou matici řádu $m \times n$. Tu přičítáme k matici A, která je rovněž řádu $m \times n$. Tedy levá strana dává smysl a výsledkem je matice řádu $m \times n$.

Obdobně pro pravou stranu dostáváme že $(A+B)+C$ dává smysl a výsledkem je vždy matice $m \times n$.

Nyní ukážeme, že se matice rovnají porovnáním po složkách. Pro každé $i \in [n]$ a $j \in [m]$ platí:

$$\begin{aligned}
[A+(B+C)]_{i,j} &= [A]_{i,j} + [(B+C)]_{i,j} \\
&= [A]_{i,j} + ([B]_{i,j} + [C]_{i,j}) \\
&= ([A]_{i,j} + [B]_{i,j}) + [C]_{i,j} && \text{(asociativita sčítání v } \mathbb{R}) \\
&= [(A+B)]_{i,j} + [C]_{i,j} \\
&= [(A+B)+C]_{i,j}.
\end{aligned}$$

(b) Tvrzení platí.

Podobně jako v předchozím příkladě. Nejprve ukážeme, že obě strany dávají pro všechny uvažované matice A, B smysl a výsledky mají shodné rozměry. Poté ukazujeme rovnost po složkách, tedy pro každé $i \in [n]$ a $j \in [m]$:

$$\begin{aligned}
[A+B]_{i,j} &= [A]_{i,j} + [B]_{i,j} \\
&= [B]_{i,j} + [A]_{i,j} && \text{(komutativita sčítání v } \mathbb{R}) \\
&= [B+A]_{i,j}
\end{aligned}$$

(c) Tvrzení platí.

(d) Tvrzení platí.

(e) Tvrzení platí.

(f) Tvrzení platí.

(g) Tvrzení platí.

(h) Tvrzení platí (jedná se o distributivitu násobení a sčítání). Aby obě strany dávaly smysl musí A, B, C splňovat:

$$A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ B, C \in \mathbb{R}^{n\times p}$$

(jinak nedává ani jedna strana smysl). Díky předpokladu, že A, B, C jsou stejého řádu, tedy musí být všechny matice čtvercové.

(i) Tvrzení platí.

(j) Tvrzení platí.

(k) Tvrzení neplatí.

Ukážeme pomocí protipříkladu. Najdeme α, β, A, B, která splňují zadání, ale pro něž tvrzení neplatí. Například

$$\alpha = 2,\ \beta = 3,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ a } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dostáváme

$$\alpha A + \beta B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} (\alpha + \beta)(A + B).$$

(l) Tvrzení platí.

Je-li A matice řádu $m \times n$, pak A^T je matice řádu $n \times m$ a $(A^T)^T$ je opět matice řádu $m\times n$. Tedy matice na pravé i levé straně mají shodné rozměry. Poté dokazujeme rovnost po složkách, pro všechny $i \in [m]$ a $j \in [n]$.

$$[(A^T)^T]_{i,j} = [A^T]_{j,i} = [A]_{i,j}$$

(m) Tvrzení platí.

Matice D je symetrická pokud platí $D = D^T$. Prvně si uvědomme, že pokud matice A je rozměrů $m \times n$, pak matice A^T je rozměrů $n \times m$. Násobení matic $A^T A$ tedy dává smysl a jeho výsledkem je matice rozměrů $n \times n$.

Dále dle Věty 3.13 (Vlastnosti transpozice) ze skript víme, že pro všechny matice D, E vhodných rozměrů (takových aby šly vynásobit) platí $(DE)^T = E^T D^T$. Proto dostáváme:

$$\begin{aligned} (A^T A)^T &= A^T (A^T)^T && \text{(dle } (DE)^T = E^T D^T\text{)} \\ &= A^T A. && \text{(předchozí tvrzení)} \end{aligned}$$

(n) Tvrzení platí.

(o) Tvrzení platí.

(p) Tvrzení platí pouze pokud A je matice řádu $m\times n$ pro nějaké m a n shodující se s I_n. Jinak levá strana nedává smysl.

Cv. 5. Pro libovolnou nesymetrickou čtvercovu matici A zkonstruujte symetrickou matici B tak, že jejich součin nekomutuje, t.j. $AB \neq BA$. Komutuje součin matic pokud jsou obě matice symetrické?

Řešení:
Pro první část můžeme vybrat například matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ a } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pak

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Tvrzení neplatí ani pokud jsou obě matice symetrické. Volíme například matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ a } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dostáváme:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 6 \end{pmatrix} \neq$$
$$\neq \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} = BA.$$

Cv. 6. Dokažte nebo vyvraťte:

(a) Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Pokud A je symetrická a komutuje s B, pak A komutuje s B^T.

(b) Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Pokud A komutuje s B, pak A komutuje s B^T.

Řešení:

(a) Tvrzení platí, $AB^T = A^T B^T = (BA)^T = (AB)^T = B^T A^T = B^T A$.

(b) Tvrzení neplatí, například

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ a } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$